The Intersection Problem for Latin Squares with Holes of Size 2 and 3

Except where reference is made to the work of others, the work described in this dissertation is my own or was done in collaboration with my advisory committee. This dissertation does not include proprietary or classified information.

Charla Baker

Certificate of Approval:

Dean Hoffman
Professor
Mathematics and Statistics

Charles Lindner, Chair
Distinguished University Professor
Mathematics of Statistics

Peter Johnson
Professor
Mathematics and Statistics

David Woolbright
Professor
Mathematics
Columbus State University

George Flowers
Dean
Graduate School

The Intersection Problem for Latin Squares with Holes of Size 2 and 3

Charla Baker

A Dissertation

Submitted to

the Graduate Faculty of

Auburn University

in Partial Fulfillment of the

Requirements for the

Degree of

Doctor of Philosophy

Auburn, Alabama
May 9, 2009

The Intersection Problem for Latin Squares with Holes of Size 2 and 3

Charla Baker

Signature of Author

Date of Graduation

Vita

Charla Baker was born in Dothan, Alabama on December 30, 1977. After graduating from George W. Long High School in 1996 she attended Wallace Community College. She then transferred to Troy State University where she earned Bachelor's of Science degrees in both Mathematics and Computer Science. She began graduate school at Auburn University in 2001. In 2006 she received a Master of Science degree in Mathematics.

Dissertation Abstract

The Intersection Problem for Latin Squares with Holes of Size 2 and 3

Charla Baker

Doctor of Philosophy, May 9, 2009
(M.S., Auburn University, 2006)
(B.S., Troy University, 2001)

163 Typed Pages

Directed by Charles Lindner

In this dissertation we give complete solutions for the intersection problem of latin squares with holes of size 2 and 3. For a pair of 2n $\times$ 2n latin squares with holes of size 2 to have k entries in common outside of the holes k $\in \{0, 1, 2,...., x = 4n^2 - 4n\} \setminus \{x - 1, x - 2, x - 3, x - 5\}$. There is , however, an exception for the case of n = 8. For a pair of 3n $\times$ 3n latin squares with holes of size 3 to have k entries in common outside of the holes k $\in \{0, 1, 2,...., x = 9n^2 - 9n\} \setminus \{x - 1, x - 2, x - 3, x - 5\}$.

Acknowledgments

I would like to first and foremost thank my family. To my mom and dad I would like to say that I would not have accomplished what I have in my life without your love and support. To my sister Ruletha thank you for your typing help and moral support. I will always look up to you and see you as the smartest person I know. To all my friends, thank you for your support and making me loosen up after long research nights.

Style manual or journal used Journal of Approximation Theory (together with the style known as "aums"). Bibliograpy follows van Leunen's *A Handbook for Scholars.*

Computer software used The document preparation package TeX (specifically LaTeX) together with the departmental style-file `aums.sty`.

Table of Contents

Chapter 1

Introduction

An n × n latin square (or latin square of order n) is an n × n array such that each of the integers 1, 2, 3,...., n occurs exactly once in each row and column.

Example 1.1 (Two latin squares of order 4)

1	4	**3**	2
4	**3**	**2**	**1**
2	**1**	**4**	3
3	2	**1**	4

1	2	**3**	4
4	**3**	**2**	**1**
3	**1**	**4**	2
2	4	**1**	3

Latin squares are like grains of sand on the beach. Marshall Hall Jr. [2] has shown that there are at least n!·(n-1)!·(n-2)!....2!·1 distinct latin squares of order n; and B. Smetaniuk [4] has shown that the number of distinct latin squares of order n is strictly increasing with n. That is, if L(n) denotes the number of distinct n × n latin squares then $L(n) < L(n+1)$ for all n.

However, the focus of this dissertation is not on the number of latin squares of a given order but on the number of entries a pair of n × n latin squares can have in common. For example, the 4 × 4 latin squares in Example 1.1 have 9 entries in common.

In [1] Hung Lin Fu gave a complete solution of the intersection problem for latin squares.

Theorem 1.2 (H. L. Fu) There exists a pair of n × n latin squares having k entries in common if and only if k $\in$ {0, 1, 2,....., n^2} \ {n^2 - 1, n^2 - 2, n^2 - 3, n^2 - 5} and n $\geq$ 5. There are, however, a few exceptions for n = 1, 2, 3, and 4. ■

A quasigroup is a latin square with a headline and a sideline. For example if we add a headline and a sideline to the latin squares in Example 1.1 we have the following two quasigroups.

Example 1.3 (Two quasigroups of order 4)

∘	1	2	3	4
1	**1**	4	**3**	2
2	**4**	**3**	**2**	**1**
3	2	**1**	**4**	3
4	3	2	**1**	4

∘	1	2	3	4
1	**1**	2	**3**	4
2	**4**	**3**	**2**	**1**
3	3	**1**	**4**	2
4	2	4	**1**	3

In this dissertation we will flip back and forth between latin squares and quasigroups without warning, using whatever vernacular facilitates the discussion. Fu went on to solve the intersection problem for idempotent latin squares. A latin square of order n is idempotent provided cell (i,i) is occupied by the symbol i for all i $\in$ {1, 2, 3,...., n}.

Example 1.4 (Two idempotent latin squares of order 6)

1	**6**	2	5	3	4
4	2	5	6	1	3
2	**4**	**3**	1	6	5
5	3	6	**4**	2	1
6	1	**4**	3	5	2
3	**5**	**1**	2	4	6

1	**6**	5	2	4	3
5	2	6	1	3	4
6	**4**	**3**	5	1	2
3	1	2	**4**	6	5
2	3	**4**	6	5	1
4	**5**	**1**	3	2	6

We can ask the same question for idemptotent latin squares as we asked for latin squares: How many entries off of the main diagonal can a pair of idempotent latin squares have in common? For example, the 6 × 6 idempotent latin squares I_1 and I_2 in Example 1.4 have five entries in common off of the main diagonal (cells (1, 2), (3, 2), (5, 3), (6, 2), and (6, 3)).

Theorem 1.5 (H. L. Fu) There exists a pair of n × n idempotent latin squares having k entries in common off of the main diagonal if and only if k ∈ {0, 1, 2,....., x = n^2 - n} \ x - 1, x - 2, x - 3, x - 5} and n ≥ 6. There are a few exceptions for n = 1, 3, 4, and 5. ■

The purpose of this dissertation is to generalize Fu's results to latin squares with holes of size two and three. The following definition is more easily described in terms of quasigroups. Let H = {h_1, h_2, h_3,......, h_t} be a partition of {1, 2, 3,......., n}. The subsets h_i ∈ H are called holes. A quasigroup (Q,∘) based on {1, 2, 3,....., n} is said to be a quasigroup with holes H provided $(h_i, \circ)$ is a subquasigroup of (Q,∘) for every h_i ∈ H. If $|h_1| = |h_2| = ...= |h_t|$ = h, then (Q,∘) is said to be a quasigroup with holes of size h. Let H = {{1,2}, {3,4}, {5,6}}. The quasigroup (Q,∘) given below is a quasigroup of order 6 with holes of size 2.

Example 1.6 (Quasigroup of order 6 with holes of size 2)

∘	1	2	3	4	5	6
1	1	2	6	5	4	3
2	2	1	5	6	3	4
3	5	6	3	4	2	1
4	6	5	4	3	1	2
1	3	4	1	2	5	6
6	4	3	2	1	6	5

The holes are {1, 2}, {3, 4}, and {5, 6}.

Since an idempotent quasigroup can be considered as a quasigroup with holes of size 1, we can consider quasigroups with holes of size h to be a generalization of idempotent quasigroups. Hence, the intersection problem for quasigroups with holes of size two or three is a natural generalization of the intersection problem for idempotent quasigroups. We can now state the intersection problem for quasigroups with holes of size h: Determine the set of all pairs (n,k) such that there exists a pair of quasigroups of order n with the same holes of size h having k entries in common outside of the holes.

Example 1.7 (Two quasigroups of order 8 with holes of size 2 intersecting in 11 entries outside of the holes)

$\circ$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	**5**	**6**	**7**	**8**	**3**	**4**
2	2	1	**6**	**7**	**8**	3	4	5
3	5	8	3	4	1	**7**	6	2
4	8	7	4	3	2	1	5	6
5	7	4	8	2	5	6	1	3
6	4	3	7	8	6	5	2	1
7	3	6	1	**5**	4	2	7	8
8	6	5	2	1	3	4	8	7

$\circ$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	**5**	**6**	**7**	**8**	**3**	**4**
2	2	1	**6**	**7**	**8**	4	5	3
3	8	5	3	4	2	**7**	1	6
4	7	8	4	3	1	2	6	5
5	4	3	7	8	5	6	2	1
6	3	7	8	1	6	5	4	2
7	6	4	2	**5**	3	1	7	8
8	5	6	1	2	4	3	8	7

In this dissertation we give a complete solution of the intersection problem for quasigroups with holes of size two as well as a complete solution of the intersection problem for quasigroups with holes of size three. As mentioned earlier, we will use latin square and quasigroup vernacular interchangeably. So in Example 1.7 if we erase the headlines and sidelines we have a pair of latin squares of order 8 with holes of size 2 intersecting in 11 entries outside of the holes.

Chapter 2

Necessary Conditions

In order to determine the necessary conditions for the complete solution of the intersection problem for latin squares with holes of size 2 and 3 we will need the following definition. A trade of order n is a pair of partial latin squares of order n such that:

(1) the same cells are occupied, and

(2) the same symbols occur in each row or column

Example 2.1 (Trade of order 5)

		2	4	
	5	4	2	
	2	5		

		4	2	
	2	5	4	
	5	2		

Two (partial) latin squares are said to be disjoint provided they have no entries in common. A disjoint trade is a trade where the partial latin squares comprising the trade are disjoint. For example the trade in Example 2.1 is a disjoint trade.

It is important to note that if a pair of latin squares of order n have k entries in common then the remaining partial latin squares are a disjoint trade.

Example 2.2 (A pair of 5 × 5 latin squares intersecting in 5 cells)

1	2	3	4	5
2	3	4	5	**1**
3	4	5	1	2
4	**5**	**1**	2	3
5	**1**	2	3	4

2	4	5	1	3
5	2	3	4	**1**
1	3	2	5	4
4	**5**	**1**	3	2
3	**1**	4	2	5

Resulting disjoint trade

1	2	3	4	5
2	3	4	5	
3	4	5	1	2
			2	3
5		2	3	4

2	4	5	1	3
5	2	3	4	
1	3	2	5	4
			3	2
3		4	2	5

Clearly a trade cannot have exactly one cell in a row or column of the trade. It is straightforward to see that it is impossible to choose 1, 2, 3, or 5 cells in an n × n grid without one of the cells being the only cell in a row or column. It follows that a pair of n × n latin squares cannot intersect in exactly n^2 - 1, n^2 - 2, n^2 - 3, or n^2 - 5 cells since the cells outside of the intersection would form a disjoint trade consisting of 1, 2, 3, or 5 cells. We have the following necessary condition for a pair of n × n latin squares to have k cells in common.

A necessary condition for a pair of n × n latin squares to have k cells in common is $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n^2\} \setminus \{n^2 - 1, n^2 - 2, n^2 - 3, n^2 - 5\}$. This can immediately be extended to necessary conditions for a pair of latin squares with holes of size 2 or 3 as follows.

Let L_1 and L_2 be a pair of 2n × 2n latin squares with holes of size 2 having k entries in common outside of the holes. If we fill in the holes we have a pair of latin squares intersecting in k + 4n cells. Since the remaining cells are a disjoint trade we must have k + 4n $\in$ {0, 1, 2, 3,....., $4n^2$} \ {$4n^2$ - 1, $4n^2$ - 2, $4n^2$ - 3, $4n^2$ - 5} so that k $\in$ {0, 1, 2,...., x = $4n^2$ - 4n} \ {x - 1, x - 2, x - 3, x - 5}. A similar argument shows that k $\in$ {0, 1, 2,...., x = $9n^2$ - 9n} \ {x - 1, x - 2, x - 3, x - 5} for latin squares with holes of size 3. We have the following necessary conditions for the intersection of latin squares with holes of size 2 and 3.

NECESSARY CONDITIONS

(1) A necessary condition for a pair of 2n $\times$ 2n latin squares with holes of size 2 to have k entries in common outside of the holes is k $\in$ {0, 1, 2,...., x = $4n^2$ - 4n} \ {x - 1, x - 2, x - 3, x - 5}.

(2) A necessary condition for a pair of 3n $\times$ 3n latin squares with holes of size 3 to have k entries in common outside of the holes is k $\in$ {0, 1, 2,...., x = $9n^2$ - 9n} \ {x - 1, x - 2, x - 3, x - 5}.

We will show that these necessary conditions are sufficient with a few exceptions.

Chapter 3

An Exception for n = 8

A necessary condition for a pair of latin squares of order 8 with holes of size 2 to have k entries in common is $k \in \{0, 1, 2, \ldots\ldots, 48\} \setminus \{43, 45, 46, 47\}$. We will show in this section that 41 is not possible for n = 8.

In order for a pair of latin squares of order 8 with holes of size 2 to intersect in 41 cells (outside of the holes) the two partial latin squares resulting from removing these entries must form a disjoint trade consisting of 7 cells outside the holes.

A bit of reflection shows that such a trade must contain either 0, 2, or 3 entries in each row and column and that, apart from being spread out a bit and the rows and columns permuted, must look like Example 3.1.

Example 3.1 (Disjoint trade on 7 symbols)

X	a	b
c	b	a
a	c	X

X	b	a
a	c	b
c	a	X

We will show that such a trade cannot be placed in a pair of 8 × 8 partial latin squares (with holes of size 2) outside of the holes.

1	2						
2	1						
		3	4				
		4	3				
				5	6		
				6	5		
						7	8
						8	7

1	2						
2	1						
		3	4				
		4	3				
				5	6		
				6	5		
						7	8
						8	7

↑ NOT POSSIBLE ↑

$T_1 =$

X	a	b
c	b	a
a	c	X

$T_2 =$

X	b	a
a	c	b
c	a	X

If such a trade exists we can assume a = 1. Since a = 1 none of the cells of the trade can lie in rows 1 or 2 or columns 1 or 2.

$P_1 =$

1	2	X	X	X	X	X	X
2	1	X	X	X	X	X	X
X	X	3	4				
X	X	4	3				
X	X			5	6		
X	X			6	5		
X	X					7	8
X	X					8	7

$P_2 =$

1	2	X	X	X	X	X	X
2	1	X	X	X	X	X	X
X	X	3	4				
X	X	4	3				
X	X			5	6		
X	X			6	5		
X	X					7	8
X	X					8	7

Therefore all the cells of the trade must lie in the empty cells of P_1 and P_2.

There are a lot of cases to consider. We will look at one case here, the others being similar. It suffices to show that T_1 cannot be placed in P_1.

1	2	X	X	X	X	X	X
2	1	X	X	X	X	X	X
X	X	3	4		c	b	1
X	X	4	3				
X	X			5	6		
X	X			6	5		
X	X					7	8
X	X					8	7

It is immediate that

$$\begin{cases} c \neq 1,3,4,5,6 \;\; and \\ b \neq 1,3,4,7,8 \end{cases}$$

Therefore, c ∈ {2, 7, 8} and b ∈ {2, 5, 6}. The only possiblility for placing the row $\boxed{1|c}$ of T_1 in P_1 is

1	2	X	X	X	X	X	X
2	1	X	X	X	X	X	X
X	X	3	4		c	b	1
X	X	4	3		1	c	
X	X			5	6		
X	X			6	5		
X	X					7	8
X	X					8	7

(which forces c = 2). But the placement of $\boxed{1|c}$ in P_1 forces row $\boxed{1|b}$ of T_1 to be placed in cells (5, 7) and (5, 8) or cells (6, 7) and (6, 8). In either case b ≠ 5 or 6 which forces b = 2 = c; which of course is not possible.

There are lots of other cases which are handled similarly. The net result is that a pair of latin squares of order 8 with holes of size 2 cannot intersect in 41 cells outside of the holes.

Lemma 3.4 A necessary condition for a pair of 8 × 8 latin squares with holes of size 2 to have k entries in common outside of the holes in k ∈ {0, 1, 2,........., 48} \ {41, 43, 45, 46, 47}. ■

Chapter 4

The Intersection Problem for Latin Squares of Order 8 with Holes of Size 2

In this chapter a complete solution of the intersection problem for latin squares of order 8 with holes of size 2 is given. With the result of Chapter 3 in hand, the necessary condition for a pair of latin squares of order 8 with holes of size 2 to have k entries in common is now $k \in \{0, 1, 2,.......,48\} \setminus \{41, 43, 45, 46, 47\}$. Using a Java program we found latin squares B_1, B_2, B_3; L_1, L_2,.........., L_{44} such that for each $k \in \{0, 1, 2,......, 48\} \setminus \{41, 43, 45, 46, 47\}$ there is a B_i and L_j such that $|B_i \bigcap L_j| = k$. These intersections are given in tabular form at the end of this chapter.

The following is a list of the latin squares B_1, B_2, B_3; L_1, L_2,.........., L_{44}.

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	7	8	3	4	5
5	8	3	4	1	7	6	2
8	7	4	3	2	1	5	6
7	4	8	2	5	6	1	3
4	3	7	8	6	5	2	1
3	6	1	5	4	2	7	8
6	5	2	1	3	4	8	7

B_1

1	2	5	6	8	7	4	3
2	1	7	8	3	4	5	6
5	7	3	4	1	8	6	2
8	6	4	3	7	2	1	5
4	3	8	7	5	6	2	1
7	8	1	2	6	5	3	4
6	5	2	1	4	3	7	8
3	4	6	5	2	1	8	7

B_2

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	3	4	5	6
5	7	3	4	8	1	6	2
6	8	4	3	1	7	2	5
7	4	8	2	5	6	1	3
8	3	2	7	6	5	4	1
4	6	1	5	2	3	7	8
3	5	6	1	4	2	8	7

B_3

1	2	6	5	8	7	4	3
2	1	5	6	7	8	3	4
8	7	3	4	2	1	5	6
7	8	4	3	1	2	6	5
4	3	7	8	5	6	2	1
3	4	8	7	6	5	1	2
6	5	2	1	3	4	7	8
5	6	1	2	4	3	8	7

L_1

1	2	5	8	3	7	4	6
2	1	8	5	7	4	6	3
6	7	3	4	2	8	5	1
7	6	4	3	8	2	1	5
3	8	7	1	5	6	2	4
8	4	1	7	6	5	3	2
4	5	2	6	1	3	7	8
5	3	6	2	4	1	8	7

L_2

1	2	5	7	8	3	4	6
2	1	7	6	4	8	3	5
8	6	3	4	7	2	5	1
5	8	4	3	1	7	6	2
3	7	1	8	5	6	2	4
7	4	8	2	6	5	1	3
6	5	2	1	3	4	7	8
4	3	6	5	1	4	8	7

L_3

1	2	5	6	8	7	4	3
2	1	6	5	7	8	3	4
8	7	3	4	2	1	5	6
7	8	4	3	1	2	6	5
4	3	7	8	5	6	2	1
3	4	8	7	6	5	1	2
6	5	2	1	3	4	7	8
5	6	1	2	4	3	8	7

L_4

1	2	5	6	8	7	4	3
2	1	7	8	3	4	5	6
8	7	3	4	2	1	6	5
6	5	4	3	7	8	1	2
4	3	8	7	5	6	2	1
7	8	2	1	6	5	3	4
5	4	6	2	1	3	7	8
3	6	1	5	4	2	8	7

L_5

1	2	5	6	8	7	4	3
2	1	7	8	3	4	5	6
5	6	3	4	7	8	2	1
7	8	4	3	1	2	6	5
8	4	1	7	5	6	3	2
3	7	8	2	6	5	1	4
6	5	2	1	4	3	7	8
4	3	6	5	2	1	8	7

L_6

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	3	4	5	6
6	7	3	4	8	1	2	5
5	8	4	3	1	7	6	2
8	3	2	7	5	6	4	1
7	4	8	2	6	5	1	3
4	5	6	1	2	3	7	8
3	6	1	5	4	2	8	7

L_7

1	2	5	6	7	8	4	3
2	1	7	8	3	4	5	6
6	7	3	4	8	2	1	5
8	5	4	3	1	7	6	2
4	3	8	7	5	6	2	1
7	8	1	2	6	5	3	4
5	4	6	1	2	3	7	8
3	6	2	5	4	1	8	7

L_8

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	3	4	5	6
7	6	3	4	8	2	1	5
5	8	4	3	1	7	6	2
4	3	8	7	5	6	2	1
8	7	1	2	6	5	4	3
6	5	2	1	4	3	7	8
3	4	6	5	2	1	8	7

L_9

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	5	8	7	4	3
8	7	3	4	2	1	5	6
7	8	4	3	1	2	6	5
4	3	7	8	5	6	2	1
3	4	8	7	6	5	1	2
6	5	2	1	3	4	7	8
5	6	1	2	4	3	8	7

L_{10}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	3	4	5	6
5	6	3	4	8	7	2	1
7	8	4	3	1	2	6	5
8	3	1	7	5	6	4	2
4	7	8	2	6	5	1	3
6	5	2	1	4	3	7	8
3	4	6	5	2	1	8	7

L_{11}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	7	8	4	5	3
8	5	3	4	2	7	1	6
7	8	4	3	1	2	6	5
4	3	7	8	5	6	2	1
3	7	8	1	6	5	4	2
6	4	2	5	3	1	7	8
5	6	1	2	4	3	8	7

L_{12}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	5	8	7	4	3
7	8	3	4	2	1	5	6
8	7	4	3	1	2	6	5
4	3	7	8	5	6	2	1
3	4	8	7	6	5	1	2
6	5	2	1	3	4	7	8
5	6	1	2	4	3	8	7

L_{13}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	3	4	5	6
5	6	3	4	8	7	1	2
7	8	4	3	1	2	6	5
3	4	8	7	5	6	2	1
8	7	1	2	6	5	4	3
4	5	6	1	2	3	7	8
6	3	2	5	4	1	8	7

L_{14}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	8	4	7	5	3
5	7	3	4	8	1	2	6
7	8	4	3	1	2	6	5
3	4	8	7	5	6	1	2
8	3	7	2	6	5	4	1
6	5	2	1	3	4	7	8
4	6	1	5	2	3	8	7

L_{15}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	5	8	7	4	3
7	8	3	4	1	2	5	6
8	7	4	3	2	1	6	5
4	3	7	8	5	6	2	1
3	4	8	7	6	5	1	2
6	5	2	1	3	4	7	8
5	6	1	2	4	3	8	7

L_{16}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	7	8	4	5	3
7	8	3	4	1	2	6	5
8	5	4	3	2	7	1	6
4	3	7	8	5	6	2	1
3	7	8	1	6	5	4	2
6	4	2	5	3	1	7	8
5	6	1	2	4	3	8	7

L_{17}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	7	8	4	5	3
8	7	3	4	2	1	6	5
5	8	4	3	1	7	2	6
3	4	7	8	5	6	1	2
7	3	8	2	6	5	4	1
6	5	2	1	4	3	7	8
4	6	1	5	3	2	8	7

L_{18}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	5	8	7	4	3
7	8	3	4	1	2	5	6
8	7	4	3	2	1	6	5
3	4	7	8	5	6	2	1
4	3	8	7	6	5	1	2
6	5	2	1	3	4	7	8
5	6	1	2	4	3	8	7

L_{19}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	7	8	4	5	3
7	8	3	4	2	1	6	5
8	5	4	3	1	7	2	6
4	3	7	8	5	6	1	2
3	7	8	2	6	5	4	1
5	6	2	1	4	3	7	8
6	5	1	5	3	2	8	7

L_{20}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	7	8	4	5	3
5	8	3	4	2	7	1	6
8	7	4	3	1		6	5
3	4	7	8	5	6	2	1
7	3	8	1	6	5	4	2
4	6	2	5	3	1	7	8
6	5	1	2	4	3	8	7

L_{21}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	5	8	7	4	3
7	8	3	4	1	2	5	6
8	7	4	3	2	1	6	5
3	4	7	8	5	6	1	2
4	3	8	7	6	5	2	1
6	5	2	1	3	4	7	8
5	6	1	2	4	3	8	7

L_{22}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	3	4	5	6
5	6	3	4	8	7	1	2
7	8	4	3	2	1	6	5
8	7	1	2	5	6	4	3
4	3	8	7	6	5	2	1
3	5	6	1	4	2	7	8
6	4	2	5	1	3	8	7

L_{23}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	7	8	4	5	3
5	8	3	4	1	7	2	6
8	7	4	3	2	1	6	5
3	4	7	8	5	6	1	2
7	3	8	2	6	5	4	1
6	5	2	1	4	3	7	8
4	6	1	5	3	2	8	7

L_{24}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	5	8	7	4	3
7	8	3	4	1	2	5	6
8	7	4	3	2	1	6	5
3	4	7	8	5	6	1	2
4	3	8	7	6	5	2	1
5	6	2	1	3	4	7	8
6	5	1	2	4	3	8	7

L_{25}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	3	4	5	6
5	6	3	4	8	7	1	2
8	7	4	3	2	1	6	5
7	3	8	2	5	6	4	1
4	8	1	7	6	5	2	3
3	4	6	5	1	2	7	8
6	5	2	1	4	3	8	7

L_{26}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	3	4	6	5
5	6	3	4	8	7	1	2
8	7	4	3	2	1	5	6
4	8	1	7	5	6	2	3
7	3	8	2	6	5	4	1
3	4	6	5	1	2	7	8
6	5	2	1	4	3	8	7

L_{27}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	5	8	7	4	3
7	8	3	4	1	2	5	6
8	7	4	3	2	1	6	5
3	4	7	8	5	6	1	2
4	3	8	7	6	5	2	1
5	6	1	2	3	4	7	8
6	5	2	1	4	3	8	7

L_{28}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	7	8	4	5	3
7	8	3	4	1	2	6	5
8	5	4	3	2	7	1	6
3	7	8	1	5	6	4	2
4	3	7	8	6	5	2	1
5	6	1	2	4	3	7	8
6	4	2	5	3	1	8	7

L_{29}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	7	8	4	5	3
5	8	3	4	1	7	2	6
8	7	4	3	2	1	6	5
3	4	7	8	5	6	1	2
7	3	8	2	6	5	4	1
4	6	1	5	3	2	7	8
6	5	2	1	4	3	8	7

L_{30}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	5	8	7	4	3
7	8	3	4	1	2	5	6
8	7	4	3	2	1	6	5
3	4	7	8	5	6	1	2
4	3	8	7	6	5	2	1
5	6	1	2	4	3	7	8
6	5	2	1	3	4	8	7

L_{31}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	4	3	6	5
5	6	3	4	8	7	1	2
8	7	4	3	2	1	5	6
7	3	8	2	5	6	4	1
4	8	1	7	6	5	2	3
3	4	6	5	1	2	7	8
6	5	2	1	3	4	8	7

L_{32}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	5	8	7	4	3
7	8	3	4	1	2	5	6
8	7	4	3	2	1	6	5
3	4	8	7	5	6	1	2
4	3	7	8	6	5	2	1
5	6	1	2	4	3	7	8
6	5	2	1	3	4	8	7

L_{33}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	5	8	7	4	3
7	8	3	4	1	2	6	5
8	7	4	3	2	1	5	6
3	4	8	7	5	6	1	2
4	3	7	8	6	5	2	1
5	6	1	2	4	3	7	8
6	5	2	1	3	4	8	7

L_{34}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	6	7	8	3	4	5
5	8	3	4	1	7	6	2
8	7	4	3	2	1	5	6
7	4	8	2	5	6	1	3
4	3	7	8	6	5	2	1
3	6	1	5	4	2	7	8
6	5	2	1	3	4	8	7

L_{35}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	3	4	5	6
5	6	3	4	8	7	1	2
7	8	4	3	1	2	6	5
4	3	8	7	5	6	2	1
8	7	1	2	6	5	4	3
6	5	2	1	4	3	7	8
3	4	6		2	1	8	7

L_{36}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	3	4	5	6
5	7	3	4	8	2	6	1
8	6	4	3	1	7	2	5
4	3	8	7	5	6	1	2
7	8	1	2	6	5	4	3
6	5	2	1	4	3	7	8
3	4	6	5	2	1	8	7

L_{37}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	3	4	5	6
5	6	3	4	8	7	1	2
8	7	4	3	1	2	6	5
4	3	8	7	5	6	2	1
7	8	1	2	6	5	4	3
6	5	2	1	4	3	7	8
3	4	6	5	2	1	8	7

L_{38}

1	2	5	6	7	8	4	3
2	1	7	8	3	4	5	6
5	7	3	4	8	2	6	1
8	6	4	3	1	7	2	5
4	3	8	7	5	6	1	2
7	8	1	2	6	5	3	4
6	5	2	1	4	3	7	8
3	4	6	5	2	1	8	7

L_{39}

1	2	5	6	7	8	4	3
2	1	7	8	3	4	5	6
5	6	3	4	8	7	1	2
8	7	4	3	1	2	6	5
4	3	8	7	5	6	2	1
7	8	1	2	6	5	3	4
6	5	2	1	4	3	7	8
3	4	6	5	2	1	8	7

L_{40}

1	2	5	6	7	8	4	3
2	1	7	8	3	4	5	6
5	7	3	4	8	1	6	2
8	6	4	3	2	7	1	5
4	3	8	7	5	6	2	1
7	8	1	2	6	5	3	4
6	5	2	1	4	3	7	8
3	4	6	5	1	2	8	7

L_{41}

1	2	5	6	8	7	4	3
2	1	7	8	3	4	5	6
5	6	3	4	7	8	1	2
8	7	4	3	1	2	6	5
4	3	8	7	5	6	2	1
7	8	1	2	6	5	3	4
6	5	2	1	4	3	7	8
3	4	6	5	2	1	8	7

L_{42}

1	2	5	6	8	7	3	4
2	1	7	8	3	4	5	6
5	7	3	4	1	8	6	2
8	6	4	3	7	2	1	5
4	3	8	7	5	6	2	1
7	8	1	2	6	5	4	3
6	5	2	1	4	3	7	8
3	4	6	5	2	1	8	7

L_{43}

1	2	5	6	7	8	3	4
2	1	7	8	3	4	5	6
5	7	3	4	8	1	6	2
6	8	4	3	2	7	1	5
7	3	8	2	5	6	4	1
8	4	1	7	6	5	2	3
4	6	2	5	1	3	7	8
3	5	6	1	4	2	8	7

L_{44}

k	$B_i \bigcap L_j$	k	$B_i \bigcap L_j$	k	$B_i \bigcap L_j$
0	$B_1 \bigcap L_1$	17	$B_1 \bigcap L_{18}$	34	$B_2 \bigcap L_{35}$
1	$B_1 \bigcap L_2$	18	$B_1 \bigcap L_{19}$	35	$B_2 \bigcap L_{36}$
2	$B_1 \bigcap L_3$	19	$B_1 \bigcap L_{20}$	36	$B_1 \bigcap L_{37}$
3	$B_1 \bigcap L_4$	20	$B_1 \bigcap L_{21}$	37	$B_3 \bigcap L_{38}$
4	$B_1 \bigcap L_5$	21	$B_1 \bigcap L_{22}$	38	$B_2 \bigcap L_{39}$
5	$B_1 \bigcap L_6$	22	$B_1 \bigcap L_{23}$	39	$B_2 \bigcap L_{40}$
6	$B_1 \bigcap L_7$	23	$B_1 \bigcap L_{24}$	40	$B_2 \bigcap L_{41}$
7	$B_1 \bigcap L_8$	24	$B_1 \bigcap L_{25}$	41	
8	$B_1 \bigcap L_9$	25	$B_1 \bigcap L_{26}$	42	$B_2 \bigcap L_{42}$
9	$B_1 \bigcap L_{10}$	26	$B_1 \bigcap L_{27}$	43	
10	$B_1 \bigcap L_{11}$	27	$B_1 \bigcap L_{28}$	44	$B_2 \bigcap L_{43}$
11	$B_1 \bigcap L_{12}$	28	$B_1 \bigcap L_{29}$	45	
12	$B_1 \bigcap L_{13}$	29	$B_1 \bigcap L_{30}$	46	
13	$B_1 \bigcap L_{14}$	30	$B_1 \bigcap L_{31}$	47	
14	$B_1 \bigcap L_{15}$	31	$B_1 \bigcap L_{32}$	48	$B_1 \bigcap L_{44}$
15	$B_1 \bigcap L_{16}$	32	$B_2 \bigcap L_{33}$		
16	$B_1 \bigcap L_{17}$	33	$B_1 \bigcap L_{34}$		

Lemma 4.1 The spectrum for 8×8 latin squares with holes of size 2 having k entries in common outside of the holes is $\{0, 1, 2, \ldots\ldots, 48\} \setminus \{41, 43, 45, 46, 47\}$. ■

Chapter 5

The Intersection Problem for Latin Squares of Order 10 with Holes of Size 2

In this chapter a complete solution of the intersection problem for latin squares of order 10 with holes of size 2 is given. As stated, the necessary condition for a pair of latin squares of order 10 with holes of size 2 to have k entries in common is k $\in$ {0, 1, 2,.......,80} \ {75, 77, 78, 79}. Using a Java program and manual techniques we found latin squares B_1, B_2; L_1, L_2,.........., L_{76}, L_{77} such that for each k $\in$ {0, 1, 2,......, 80} \ {75, 77, 78, 79} there is a B_i and L_j such that $|B_i \bigcap L_j| = k$. These are given in tabular form at the end of this chapter.

The following is a list of the latin squares B_1, B_2, B_3; L_1, L_2,.........., L_{76}, L_{77}:

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	10	9	1	5	6	2
9	10	4	3	7	8	5	6	2	1
8	9	7	10	5	6	2	1	4	3
10	7	9	8	6	5	3	2	1	4
3	4	10	9	2	1	7	8	5	6
4	6	1	2	9	10	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
6	5	8	7	1	2	4	3	10	9

B_1

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
5	6	9	10	1	2	7	8	3	4
6	5	10	9	2	1	8	7	4	3
3	4	1	2	7	8	5	6	9	10
4	3	2	1	8	7	6	5	10	9

B_2

1	2	6	5	4	7	10	9	8	3
2	1	5	6	3	4	9	10	7	8
5	9	3	4	8	10	2	6	1	7
7	8	4	3	10	9	1	2	5	6
9	7	10	8	5	6	3	4	2	1
8	10	7	9	6	5	4	1	3	2
10	6	1	2	9	3	7	8	4	5
3	5	9	10	1	2	8	7	6	4
6	4	8	7	2	1	5	3	9	10
4	3	2	1	7	8	6	5	10	9

L_1

1	2	6	5	4	7	10	9	8	3
2	1	5	6	3	4	9	10	7	8
5	8	3	4	9	10	2	6	1	7
10	7	4	3	8	9	1	2	5	6
7	10	8	9	5	6	3	4	2	1
8	9	10	7	6	5	4	1	3	2
6	3	9	1	10	2	7	8	4	5
9	5	2	10	1	3	8	7	6	4
4	6	1	2	7	8	5	3	9	10
3	4	7	8	2	1	6	5	10	9

L_2

1	2	6	5	4	3	10	9	8	7
2	1	5	6	7	4	9	10	3	8
5	9	3	4	10	8	6	2	7	1
7	8	4	3	9	10	2	1	6	5
9	7	8	10	5	6	4	3	1	2
8	10	9	7	6	5	1	4	2	3
10	6	2	1	3	9	7	8	5	4
3	5	10	9	2	1	8	7	4	6
6	4	7	8	1	2	3	5	9	10
4	3	1	2	8	7	5	6	10	9

L_3

1	2	6	5	4	7	10	9	8	3
2	1	5	6	3	4	9	10	7	8
5	8	3	4	9	10	2	6	1	7
10	7	4	3	8	9	1	2	5	6
7	10	8	9	5	6	3	4	2	1
8	9	10	7	6	5	4	1	3	2
6	3	9	1	10	2	7	8	4	5
9	5	2	10	1	3	8	7	6	4
3	4	7	8	2	1	6	5	9	10
4	6	1	2	7	8	5	3	10	9

L_4

1	2	6	5	4	3	10	9	8	7
2	1	5	6	7	4	9	10	3	8
9	5	3	4	10	8	6	2	7	1
8	7	4	3	9	10	2	1	6	5
7	9	8	10	5	6	4	3	1	2
10	8	9	7	6	5	1	4	2	3
6	10	2	1	3	9	7	8	5	4
5	3	10	9	2	1	8	7	4	6
4	6	7	8	1	2	3	5	9	10
3	4	1	2	8	7	5	6	10	9

L_5

1	2	6	5	4	3	10	9	7	8
2	1	5	6	7	4	9	10	8	3
5	9	3	4	10	8	6	2	1	7
7	8	4	3	9	10	2	1	5	6
9	7	8	10	5	6	4	3	2	1
8	10	9	7	6	5	1	4	3	2
10	6	2	1	3	9	7	8	4	5
3	5	10	9	2	1	8	7	6	4
6	4	7	8	1	2	3	5	9	10
4	3	1	2	8	7	5	6	10	9

L_6

1	2	5	6	4	7	10	9	8	3
2	1	6	5	3	4	9	10	7	8
5	9	3	4	8	10	2	6	1	7
7	8	4	3	10	9	1	2	5	6
9	7	8	10	5	6	3	4	2	1
8	10	9	7	6	5	4	1	3	2
10	6	2	1	9	3	7	8	4	5
3	5	10	9	1	2	8	7	6	4
6	4	7	8	2	1	5	3	9	10
4	3	1	2	7	8	6	5	10	9

L_7

1	2	6	5	4	7	10	9	8	3
2	1	5	6	3	4	9	10	7	8
5	8	3	4	9	10	2	6	1	7
10	7	4	3	8	9	1	2	5	6
8	9	10	7	5	6	4	1	3	2
7	10	8	9	6	5	3	4	2	1
6	3	9	1	10	2	7	8	4	5
9	5	2	10	1	3	8	7	6	4
3	4	7	8	2	1	6	5	9	10
4	6	1	2	7	8	5	3	10	9

L_8

1	2	6	5	4	7	10	9	8	3
2	1	5	6	3	4	9	10	7	8
10	7	3	4	8	9	1	2	5	6
5	8	4	3	9	10	2	6	1	7
8	9	10	7	5	6	4	1	3	2
7	10	8	9	6	5	3	4	2	1
6	3	9	1	10	2	7	8	4	5
9	5	2	10	1	3	8	7	6	4
3	4	7	8	2	1	6	5	9	10
4	6	1	2	7	8	5	3	10	9

L_9

1	2	5	6	3	4	10	9	8	7
2	1	6	5	4	7	9	10	3	8
5	8	3	4	9	10	6	2	7	1
10	7	4	3	8	9	2	1	6	5
7	10	8	9	5	6	4	3	1	2
8	9	10	7	6	5	1	4	2	3
6	3	9	1	10	2	7	8	5	4
9	5	2	10	1	3	8	7	4	6
4	6	1	2	7	8	3	5	9	10
3	4	7	8	2	1	5	6	10	9

L_{10}

1	2	6	5	4	3	9	10	7	8
2	1	5	6	7	4	10	9	8	3
5	9	3	4	10	8	2	6	1	7
7	8	4	3	9	10	1	2	5	6
9	7	8	10	5	6	3	4	2	1
8	10	9	7	6	5	4	1	3	2
10	6	2	1	3	9	7	8	4	5
3	5	10	9	2	1	8	7	6	4
6	4	7	8	1	2	5	3	9	10
4	3	1	2	8	7	6	5	10	9

L_{11}

1	2	5	6	4	7	10	9	8	3
2	1	6	5	3	4	9	10	7	8
5	8	3	4	9	10	2	6	1	7
10	7	4	3	8	9	1	2	5	6
7	10	9	8	5	6	3	4	2	1
8	9	7	10	6	5	4	1	3	2
6	3	1	9	10	2	7	8	4	5
9	5	10	2	1	3	8	7	6	4
4	6	2	1	7	8	5	3	9	10
3	4	8	7	2	1	6	5	10	9

L_{12}

1	2	6	5	3	4	9	10	7	8
2	1	5	6	4	7	10	9	8	3
5	9	3	4	8	10	2	6	1	7
7	8	4	3	10	9	1	2	5	6
9	7	8	10	5	6	3	4	2	1
8	10	9	7	6	5	4	1	3	2
10	6	2	1	9	3	7	8	4	5
3	5	10	9	1	2	8	7	6	4
6	4	7	8	2	1	5	3	9	10
4	3	1	2	7	8	6	5	10	9

L_{13}

1	2	5	6	3	4	9	10	8	7
2	1	6	5	4	7	10	9	3	8
5	8	3	4	9	10	2	6	7	1
10	7	4	3	8	9	1	2	6	5
7	10	8	9	5	6	3	4	1	2
8	9	10	7	6	5	4	1	2	3
6	3	9	1	10	2	7	8	5	4
9	5	2	10	1	3	8	7	4	6
4	6	1	2	7	8	5	3	9	10
3	4	7	8	2	1	6	5	10	9

L_{14}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	7	10	9	8	3
5	9	3	4	8	10	2	6	1	7
7	8	4	3	10	9	1	2	5	6
9	7	10	8	5	6	3	4	2	1
8	10	7	9	6	5	4	1	3	2
10	6	1	2	9	3	7	8	4	5
3	5	9	10	1	2	8	7	6	4
6	4	8	7	2	1	5	3	9	10
4	3	2	1	7	8	6	5	10	9

L_{15}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	7	10	9	8	3
5	8	3	4	9	10	2	6	1	7
10	7	4	3	8	9	1	2	5	6
7	10	8	9	5	6	3	4	2	1
8	9	10	7	6	5	4	1	3	2
6	3	9	1	10	2	7	8	4	5
9	5	2	10	1	3	8	7	6	4
4	6	1	2	7	8	5	3	9	10
3	4	7	8	2	1	6	5	10	9

L_{16}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
8	7	3	4	9	10	2	1	5	6
10	9	4	3	8	7	1	2	6	5
7	8	10	9	5	6	3	4	1	2
9	10	8	7	6	5	4	3	2	1
5	6	1	2	10	9	7	8	3	4
6	5	9	10	1	2	8	7	4	3
3	4	7	8	2	1	5	6	9	10
4	3	2	1	7	8	6	5	10	9

L_{17}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	10	3	4	8	9	2	1	6	5
10	9	4	3	7	8	1	2	5	6
8	7	10	9	5	6	4	3	1	2
9	8	7	10	6	5	3	4	2	1
6	5	1	2	9	10	7	8	4	3
5	6	9	1	10	2	8	7	3	4
4	3	2	8	1	7	6	5	9	10
3	4	8	7	2	1	5	6	10	9

L_{18}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	7	10	9	8	3
5	9	3	4	8	10	2	6	1	7
7	8	4	3	10	9	1	2	5	6
9	7	10	8	5	6	3	4	2	1
8	10	7	9	6	5	4	1	3	2
10	6	1	2	9	3	7	8	4	5
3	5	9	10	1	2	8	7	6	4
6	4	8	7	2	1	5	3	9	10
4	3	2	1	7	8	6	5	10	9

L_{19}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	7	10	9	8	3
5	8	3	4	9	10	2	6	1	7
10	7	4	3	8	9	1	2	5	6
7	10	8	9	5	6	3	4	2	1
8	9	10	7	6	5	4	1	3	2
6	3	9	1	10	2	7	8	4	5
9	5	2	10	1	3	8	7	6	4
4	6	1	2	7	8	5	3	9	10
3	4	7	8	2	1	6	5	10	9

L_{20}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	2	1	6	5
9	10	4	3	7	8	1	2	5	6
10	9	8	7	5	6	4	3	2	1
8	7	9	10	6	5	3	4	1	2
5	6	1	2	10	9	8	7	3	4
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
3	4	7	8	1	2	5	6	10	9

L_{21}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	5	6	2
9	10	4	3	7	8	5	6	2	1
10	9	8	7	5	6	2	1	4	3
8	7	9	10	6	5	3	2	1	4
3	4	10	9	2	1	7	8	5	6
4	6	1	2	10	9	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
6	5	7	8	1	2	4	3	10	9

L_{22}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	6	5
9	10	4	3	7	8	5	6	1	2
10	9	8	7	5	6	4	3	2	1
8	7	9	10	6	5	2	1	3	4
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
3	4	1	2	10	9	8	7	5	6
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
5	6	7	8	1	2	3	4	10	9

L_{23}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	6	5
9	10	4	3	7	8	2	6	5	1
10	9	8	7	5	6	4	1	2	3
8	7	9	10	6	5	3	4	1	2
3	5	10	9	2	1	7	8	4	6
5	6	1	2	10	9	8	7	3	4
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
6	4	7	8	1	2	5	3	10	9

L_{24}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
9	10	4	3	7	8	5	6	1	2
10	9	8	7	5	6	4	3	2	1
8	7	9	10	6	5	2	1	3	4
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
3	4	1	2	10	9	8	7	6	5
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
5	6	7	8	1	2	3	4	10	9

L_{25}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	6	5
8	9	4	3	10	7	2	6	5	1
10	7	8	9	5	6	4	1	2	3
9	10	7	8	6	5	3	4	1	2
3	5	10	1	2	9	7	8	4	6
5	6	9	10	1	2	8	7	3	4
4	3	2	7	8	1	6	5	9	10
6	4	1	2	7	8	5	3	10	9

L_{26}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	9	4	3	10	7	5	6	1	2
10	7	8	9	5	6	4	3	2	1
9	10	7	8	6	5	2	1	3	4
6	5	10	1	2	9	7	8	4	3
3	4	9	10	1	2	8	7	6	5
4	3	2	7	8	1	6	5	9	10
5	6	1	2	7	8	3	4	10	9

L_{27}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
9	10	4	3	7	8	5	6	1	2
8	9	10	7	5	6	4	3	2	1
10	7	9	8	6	5	2	1	3	4
6	5	1	9	10	2	7	8	4	3
3	4	2	10	1	9	8	7	6	5
4	3	8	1	2	7	6	5	9	10
5	6	7	2	8	1	3	4	10	9

L_{28}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	5	6	1	2
10	9	8	7	5	6	4	3	2	1
9	10	7	8	6	5	2	1	3	4
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
3	4	9	10	1	2	8	7	6	5
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
5	6	1	2	7	8	3	4	10	9

L_{29}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	9	4	3	10	7	5	6	1	2
9	10	8	7	5	6	4	3	2	1
10	7	9	8	6	5	2	1	3	4
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
3	4	2	10	1	9	8	7	6	5
4	3	7	1	8	2	6	5	9	10
5	6	1	2	7	8	3	4	10	9

L_{30}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
10	9	8	7	5	6	4	1	2	3
9	10	7	8	6	5	3	4	1	2
6	3	10	9	2	1	7	8	4	5
5	6	9	10	1	2	8	7	3	4
4	5	2	1	8	7	6	3	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{31}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	5	6	1	2
10	9	8	7	5	6	2	3	4	1
9	10	7	8	6	5	3	1	2	4
4	5	10	9	2	1	7	8	6	3
6	4	9	10	1	2	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
3	6	1	2	7	8	4	5	10	9

L_{32}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
10	9	8	7	5	6	4	3	2	1
9	10	7	8	6	5	3	4	1	2
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
5	6	9	10	1	2	8	7	3	4
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{33}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
10	9	8	7	5	6	3	1	2	4
9	10	7	8	6	5	4	3	1	2
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
4	6	9	10	1	2	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{34}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	8	7	5	6	4	1	2	3
10	9	7	8	6	5	3	4	1	2
6	3	10	9	2	1	7	8	4	5
5	6	9	10	1	2	8	7	3	4
4	5	2	1	8	7	6	3	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{35}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	5	6	1	2
9	10	8	7	5	6	2	3	4	1
10	9	7	8	6	5	3	1	2	4
4	5	10	9	2	1	7	8	6	3
6	4	9	10	1	2	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
3	6	1	2	7	8	4	5	10	9

L_{36}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	8	7	5	6	4	3	2	1
10	9	7	8	6	5	3	4	1	2
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
5	6	9	10	1	2	8	7	3	4
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{37}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	8	7	5	6	3	1	2	4
10	9	7	8	6	5	4	3	1	2
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
4	6	9	10	1	2	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{38}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	4	1	2	3
10	9	8	7	6	5	3	4	1	2
6	3	10	9	2	1	7	8	4	5
5	6	9	10	1	2	8	7	3	4
4	5	2	1	8	7	6	3	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{39}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
10	9	8	7	5	6	3	1	2	4
9	10	7	8	6	5	4	3	1	2
4	6	10	9	2	1	7	8	3	5
6	5	9	10	1	2	8	7	4	3
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{40}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	7	8	5	6	4	3	2	1
10	9	8	7	6	5	3	4	1	2
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
5	6	9	10	1	2	8	7	3	4
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{41}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
4	6	9	10	1	2	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{42}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	4	1	2	3
10	9	8	7	6	5	3	4	1	2
6	3	9	10	2	1	7	8	4	5
5	6	10	9	1	2	8	7	3	4
4	5	2	1	8	7	6	3	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{43}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	8	7	5	6	3	1	2	4
10	9	7	8	6	5	4	3	1	2
4	6	10	9	2	1	7	8	3	5
6	5	9	10	1	2	8	7	4	3
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{44}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	7	8	5	6	3	4	2	1
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
5	6	9	10	1	2	8	7	3	4
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{45}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
6	5	9	10	2	1	7	8	4	3
4	6	10	9	1	2	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{46}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	4	1	2	3
10	9	8	7	6	5	3	4	1	2
6	3	9	10	1	2	7	8	4	5
5	6	10	9	2	1	8	7	3	4
4	5	2	1	8	7	6	3	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{47}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
4	6	10	9	2	1	7	8	3	5
6	5	9	10	1	2	8	7	4	3
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{48}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	5	10	9	2	1	7	8	4	3
5	6	9	10	1	2	8	7	3	4
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{49}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
6	5	9	10	1	2	7	8	4	3
4	6	10	9	2	1	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{50}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	1	2	3
3	6	10	9	2	1	7	8	4	5
6	5	9	10	1	2	8	7	3	4
4	3	2	1	8	7	5	6	9	10
5	4	1	2	7	8	6	3	10	9

L_{51}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
4	6	9	10	2	1	7	8	3	5
6	5	10	9	1	2	8	7	4	3
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{52}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
5	6	10	9	2	1	7	8	4	3
6	5	9	10	1	2	8	7	3	4
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{53}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
4	6	10	9	2	1	7	8	3	5
6	5	9	10	1	2	8	7	4	3
3	4	2	1	8	7	5	6	9	10
5	3	1	2	7	8	6	4	10	9

L_{54}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	1	2	3
3	6	9	10	2	1	7	8	4	5
6	5	10	9	1	2	8	7	3	4
4	3	2	1	8	7	5	6	9	10
5	4	1	2	7	8	6	3	10	9

L_{55}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
4	6	9	10	1	2	7	8	3	5
6	5	10	9	2	1	8	7	4	3
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{56}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
5	6	9	10	2	1	7	8	4	3
6	5	10	9	1	2	8	7	3	4
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{57}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
4	6	9	10	2	1	7	8	3	5
6	5	10	9	1	2	8	7	4	3
3	4	2	1	8	7	5	6	9	10
5	3	1	2	7	8	6	4	10	9

L_{58}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	1	2	3
3	6	9	10	1	2	7	8	4	5
6	5	10	9	2	1	8	7	3	4
4	3	2	1	8	7	5	6	9	10
5	4	1	2	7	8	6	3	10	9

L_{59}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
4	6	9	10	1	2	7	8	3	5
6	5	10	9	2	1	8	7	4	3
5	3	1	2	8	7	6	4	9	10
3	4	2	1	7	8	5	6	10	9

L_{60}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
5	6	9	10	1	2	7	8	4	3
6	5	10	9	2	1	8	7	3	4
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{61}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
4	6	9	10	1	2	7	8	3	5
6	5	10	9	2	1	8	7	4	3
3	4	2	1	8	7	5	6	9	10
5	3	1	2	7	8	6	4	10	9

L_{62}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	1	2	3
3	6	9	10	1	2	7	8	4	5
6	5	10	9	2	1	8	7	3	4
4	3	1	2	8	7	5	6	9	10
5	4	2	1	7	8	6	3	10	9

L_{63}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
4	6	9	10	1	2	7	8	3	5
6	5	10	9	2	1	8	7	4	3
5	3	1	2	7	8	6	4	9	10
3	4	2	1	8	7	5	6	10	9

L_{64}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
5	6	9	10	1	2	7	8	3	4
6	5	10	9	2	1	8	7	4	3
4	3	2	1	8	7	6	5	9	10
3	4	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{65}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
4	6	9	10	1	2	7	8	3	5
6	5	10	9	2	1	8	7	4	3
3	4	1	2	8	7	5	6	9	10
5	3	2	1	7	8	6	4	10	9

L_{66}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	5	6	2
9	10	4	3	7	8	5	6	2	1
8	7	9	10	5	6	2	1	4	3
10	9	7	8	6	5	3	2	1	4
3	4	1	2	10	9	7	8	5	6
4	6	10	9	2	1	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
6	5	8	7	1	2	4	3	10	9

L_{67}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	5	6	2
9	10	4	3	7	8	5	6	2	1
8	7	10	9	5	6	2	1	4	3
10	9	7	8	6	5	3	2	1	4
3	4	1	10	2	9	7	8	5	6
4	6	9	2	10	1	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
6	5	8	7	1	2	4	3	10	9

L_{68}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
5	6	9	10	1	2	7	8	3	4
6	5	10	9	2	1	8	7	4	3
3	4	2	1	8	7	6	5	9	10
4	3	1	2	7	8	5	6	10	9

L_{69}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	5	6	1
9	10	7	8	5	6	3	1	2	4
10	9	8	7	6	5	4	3	1	2
4	6	9	10	1	2	7	8	3	5
6	5	10	9	2	1	8	7	4	3
3	4	1	2	7	8	5	6	9	10
5	3	2	1	8	7	6	4	10	9

L_{70}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	5	6	2
9	10	4	3	7	8	5	6	2	1
8	9	7	10	5	6	2	1	4	3
10	7	9	8	6	5	3	2	1	4
3	4	1	2	10	9	7	8	5	6
4	6	10	9	2	1	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
6	5	8	7	1	2	4	3	10	9

L_{71}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	10	9	1	5	6	2
9	10	4	3	7	8	5	6	2	1
8	9	7	10	5	6	2	1	4	3
10	7	9	8	6	5	3	2	1	4
3	4	1	9	2	10	7	8	5	6
4	6	10	1	9	2	8	7	3	5
5	3	2	7	8	1	6	4	9	10
6	5	8	2	1	7	4	3	10	9

L_{72}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
5	6	9	10	1	2	7	8	3	4
6	5	10	9	2	1	8	7	4	3
3	4	1	2	8	7	6	5	9	10
4	3	2	1	7	8	5	6	10	9

L_{73}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	10	9	1	5	6	2
9	10	4	3	7	8	5	6	2	1
8	7	9	10	5	6	2	1	4	3
10	9	8	7	6	5	3	2	1	4
3	4	10	9	2	1	7	8	5	6
4	6	1	2	9	10	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
6	5	7	8	1	2	4	3	10	9

L_{74}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	9	3	4	10	8	1	5	6	2
8	10	4	3	7	9	5	6	2	1
9	8	7	10	5	6	2	1	4	3
10	7	9	8	6	5	3	2	1	4
3	4	10	9	2	1	7	8	5	6
4	6	1	2	9	10	8	7	3	5
5	3	2	1	8	7	6	4	9	10
6	5	8	7	1	2	4	3	10	9

L_{75}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
5	6	9	10	1	2	7	8	3	4
6	5	10	9	2	1	8	7	4	3
3	4	1	2	7	8	6	5	9	10
4	3	2	1	8	7	5	6	10	9

L_{76}

1	2	5	6	3	4	9	10	7	8
2	1	6	5	4	3	10	9	8	7
7	8	3	4	9	10	1	2	5	6
8	7	4	3	10	9	2	1	6	5
9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
5	6	9	10	1	2	7	8	3	4
6	5	10	9	2	1	8	7	4	3
3	4	1	2	7	8	5	6	9	10
4	3	2	1	8	7	6	5	10	9

L_{77}

k	$B_i \bigcap L_j$	k	$B_i \bigcap L_j$	k	$B_i \bigcap L_j$	k	$B_i \bigcap L_j$	k	$B_i \bigcap L_j$
0	$B_1 \bigcap L_1$	17	$B_1 \bigcap L_{18}$	34	$B_2 \bigcap L_{35}$	51	$B_2 \bigcap L_{52}$	68	$B_2 \bigcap L_{69}$
1	$B_1 \bigcap L_2$	18	$B_2 \bigcap L_{19}$	35	$B_2 \bigcap L_{36}$	52	$B_2 \bigcap L_{53}$	69	$B_2 \bigcap L_{70}$
2	$B_1 \bigcap L_3$	19	$B_2 \bigcap L_{20}$	36	$B_2 \bigcap L_{37}$	53	$B_2 \bigcap L_{54}$	70	$B_1 \bigcap L_{71}$
3	$B_1 \bigcap L_4$	20	$B_2 \bigcap L_{21}$	37	$B_2 \bigcap L_{38}$	54	$B_2 \bigcap L_{55}$	71	$B_1 \bigcap L_{72}$
4	$B_1 \bigcap L_5$	21	$B_2 \bigcap L_{22}$	38	$B_2 \bigcap L_{39}$	55	$B_2 \bigcap L_{56}$	72	$B_2 \bigcap L_{73}$
5	$B_1 \bigcap L_6$	22	$B_2 \bigcap L_{23}$	39	$B_2 \bigcap L_{40}$	56	$B_2 \bigcap L_{57}$	73	$B_1 \bigcap L_{74}$
6	$B_1 \bigcap L_7$	23	$B \bigcap L_{24}$	40	$B_2 \bigcap L_{41}$	57	$B_2 \bigcap L_{58}$	74	$B_1 \bigcap L_{75}$
7	$B_1 \bigcap L_8$	24	$B_2 \bigcap L_{25}$	41	$B_2 \bigcap L_{42}$	58	$B_2 \bigcap L_{59}$	75	
8	$B_1 \bigcap L_9$	25	$B_2 \bigcap L_{26}$	42	$B_2 \bigcap L_{43}$	59	$B_2 \bigcap L_{60}$	76	$B_2 \bigcap L_{76}$
9	$B_1 \bigcap L_{10}$	26	$B_2 \bigcap L_{27}$	43	$B_2 \bigcap L_{44}$	60	$B_2 \bigcap L_{61}$	77	
10	$B_1 \bigcap L_{11}$	27	$B_2 \bigcap L_{28}$	44	$B_2 \bigcap L_{45}$	61	$B_2 \bigcap L_{62}$	78	
11	$B_1 \bigcap L_{12}$	28	$B_2 \bigcap L_{29}$	45	$B_2 \bigcap L_{46}$	62	$B_2 \bigcap L_{63}$	79	
12	$B_1 \bigcap L_{13}$	29	$B_2 \bigcap L_{30}$	46	$B_2 \bigcap L_{47}$	63	$B_2 \bigcap L_{64}$	80	$B_2 \bigcap L_{77}$
13	$B_1 \bigcap L_{14}$	30	$B_2 \bigcap L_{31}$	47	$B_2 \bigcap L_{48}$	64	$B_2 \bigcap L_{65}$		
14	$B_1 \bigcap L_{15}$	31	$B_2 \bigcap L_{32}$	48	$B_2 \bigcap L_{49}$	65	$B_2 \bigcap L_{66}$		
15	$B_1 \bigcap L_{16}$	32	$B_2 \bigcap L_{33}$	49	$B_2 \bigcap L_{50}$	66	$B_2 \bigcap L_{67}$		
16	$B_1 \bigcap L_{17}$	33	$B_2 \bigcap L_{34}$	50	$B_2 \bigcap L_{51}$	67	$B_1 \bigcap L_{68}$		

Lemma 5.1 The spectrum for 10×10 latin squares with holes of size 2 having k entries in common outside of the holes is $\{0, 1, 2, \ldots\ldots, 80\} \setminus \{75, 77, 78, 79\}$. ■

Chapter 6

The Complete Solution of the Intersection Problem for Latin Squares with Holes of Size 2

To begin with there is nothing to prove for n = 2 and 4. For n = 6 it is immediate that the possible intersection numbers are {0, 4, 8, 12, 16, 20, 24}.

Now let A_1, B_1, C_1, and D_1 be any idempotent latin squares of order $n \geq 6$ and let T be the latin square

T =

1	2
2	1

Let T_1 be the latin square defined by the generalized direct product

T_1 =

$A_1 \times \{1\}$	$B_1 \times \{2\}$
$C_1 \times \{2\}$	$D_1 \times \{1\}$

Then T_1 is a latin square of order 2n with holes $H = \{h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n\}$, $h_i = \{(i, 1), (i, 2)\}$, of size 2.

Example 6.1 (Generalized direct product of order 12)

$A_1 =$

1	6	2	5	3	4
4	2	5	6	1	3
2	4	3	1	6	5
5	3	6	4	2	1
6	1	4	3	5	2
3	5	1	2	4	6

$B_1 =$

1	6	5	2	4	3
5	2	6	1	3	4
6	4	3	5	1	2
3	1	2	4	6	5
2	3	4	6	5	1
4	5	1	3	2	6

$C_1 =$

1	5	6	2	3	4
6	2	5	1	4	3
5	4	3	6	2	1
3	1	2	4	6	5
4	6	1	3	5	2
2	3	4	5	1	6

$D_1 =$

1	5	2	6	3	4
5	2	6	1	4	3
6	4	3	2	1	5
3	1	5	4	6	2
2	6	4	3	5	1
4	3	1	5	2	6

Then

$T_1 =$

1,1	6,1	2,1	5,1	3,1	4,1	1,2	6,2	5,2	2,2	4,2	3,2
4,1	2,1	5,1	6,1	1,1	3,1	5,2	2,2	6,2	1,2	3,2	4,2
2,1	4,1	3,1	1,1	6,1	5,1	6,2	4,2	3,2	5,2	1,2	2,2
5,1	3,1	6,1	4,1	2,1	1,1	3,2	1,2	2,2	4,2	6,2	5,2
6,1	1,1	4,1	3,1	5,1	2,1	2,2	3,2	4,2	6,2	5,2	1,2
3,1	5,1	1,1	2,1	4,1	6,1	4,2	5,2	1,2	3,2	2,2	6,2
1,2	5,2	6,2	2,2	3,2	4,2	1,1	5,1	2,1	6,1	3,1	4,1
6,2	2,2	5,2	1,2	4,2	3,2	5,1	2,1	6,1	1,1	4,1	3,1
5,2	4,2	3,2	6,2	2,2	1,2	6,1	4,1	3,1	2,1	1,1	5,1
3,2	1,2	2,2	4,2	6,2	5,2	3,1	1,1	5,1	4,1	6,1	2,1
4,2	6,2	1,2	3,2	5,2	2,2	2,1	6,1	4,1	3,1	5,1	1,1
2,2	3,2	4,2	5,2	1,2	6,2	4,1	3,1	1,1	5,1	2,1	6,1

Note the cells of size 2 are {(i, 1), (i, 2)}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Now let A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, and D_2 be idempotent latin squares of order $n \geq 6$ and let

$T_1 =$

$A_1 \times \{1\}$	$B_1 \times \{2\}$
$C_1 \times \{2\}$	$D_1 \times \{1\}$

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline A_2 \times \{1\} & B_2 \times \{2\} \\ \hline C_2 \times \{2\} & D_2 \times \{1\} \\ \hline \end{array}$$

be the generalized direct products of order 2n constructed from the above latin squares and T. Then T_1 and T_2 are latin squares of order 2n with holes $H = \{h_1, h_2, ..., h_n\}$, $h_i = \{(i, 1), (i, 2)\}$, of size 2.

To keep from endlessly saying "outside of the holes" (and this includes holes of size 1; i.e., idempotent latin squares) it is understood that "intersection" means "intersection outside of the holes."

If $|A_1 \bigcap A_2| = x$, $|B_1 \bigcap B_2| = y$, $|C_1 \bigcap C_2| = z$, and $|D_1 \bigcap D_2| = w$, then $|T_1 \bigcap T_2| = x + y + z + w$.

Example 6.2 (Two 12 × 12 latin squares intersecting in 40 cells)

A_2 =

1	5	2	3	6	4
5	2	6	1	4	3
6	4	3	2	1	5
2	6	5	4	3	1
4	3	1	6	5	2
3	1	4	5	2	6

B_2 =

1	5	2	3	6	4
5	2	6	1	4	3
6	4	3	2	1	5
2	6	2	4	3	1
3	1	4	6	5	2
4	3	1	5	2	6

C_2 =

1	6	2	5	3	4
4	2	5	6	1	3
5	4	3	1	6	2
3	1	6	4	2	5
6	3	4	2	5	1
2	5	1	3	4	6

D_2 =

1	4	2	5	6	3
6	2	5	1	3	4
4	1	3	6	2	5
5	3	6	4	1	2
2	6	4	3	5	1
3	5	1	2	4	6

Then

$T_2 =$

1,1	6,1	2,1	5,1	3,1	4,1	1,2	4,2	2,2	5,2	6,2	3,2
4,1	2,1	5,1	6,1	1,1	3,1	6,2	2,2	5,2	1,2	3,2	4,2
5,1	4,1	3,1	1,1	6,1	2,1	4,2	1,2	3,2	6,2	2,2	5,2
3,1	1,1	6,1	4,1	2,1	5,1	5,2	3,2	6,2	4,2	1,2	2,2
6,1	3,1	4,1	2,1	5,1	1,1	2,2	6,2	4,2	3,2	5,2	1,2
2,1	5,1	1,1	3,1	4,1	6,1	3,2	5,2	1,2	2,2	4,2	6,2
1,2	5,2	2,2	3,2	6,2	4,2	1,1	5,1	2,1	3,1	6,1	4,1
5,2	2,2	6,2	4,2	1,2	3,2	5,1	2,1	6,1	1,1	4,1	3,1
6,2	4,2	3,2	2,2	1,2	5,2	6,1	4,1	3,1	2,1	1,1	5,1
2,2	6,2	5,2	4,2	3,2	1,2	2,1	6,1	5,1	4,1	3,1	1,1
4,2	3,2	1,2	6,2	5,2	2,2	3,1	1,1	4,1	6,1	5,1	2,1
3,2	1,2	4,2	5,2	2,2	6,2	4,1	3,1	1,1	5,1	2,1	6,1

If A_1, B_1, C_1, and D_1, are as in Example 6.1: $|A_1 \bigcap A_2| = 8$, $|B_1 \bigcap B_2| = 13$, $|C_1 \bigcap C_2| = 10$, and $|D_1 \bigcap D_2| = 9$; so that $|T_1 \bigcap T_2| = 8 + 13 + 10 + 9 = 40$.

Lemma 6.3 If $2n \geq 12$, there exists a pair of $2n \times 2n$ latin squares with holes of size 2 intersecting in k entries if and only if $k \in \{0, 1, 2,....., x = 4n^2 - 4n\} \setminus \{x - 1, x - 2, x - 3, x - 5\}$. ■

Proof. If $k \in \{0, 1, 2,...., x = 4n^2 - 4n\} \setminus \{x - 1, x - 2, x - 3, x - 5\}$, we can always write $k = x + y + z + w$, where each of x, y, z, and w belongs to $\{0, 1, 2,......, x = n^2 - n\} \setminus \{x - 1, x - 2, x - 3, x - 5\}$. ■

Theorem 6.4 The spectrum for pairs of latin squares with holes of size 2 intersecting in k entries is:

(i) (6, k), k $\in$ {0, 4, 8, 12, 16, 20, 24},

(ii) (8, k), k $\in$ {0, 1, 2,......, 48} $\setminus$ {41, 43, 45, 46, 47}, and

(iii) (2n, k), 2n $\geq$ 10 and k $\in$ {0, 1, 2,......., x = $4n^2$ - 4n} $\setminus$ {x - 1, x - 2, x - 3, x - 5}.

■

Proof. The comments at the beginning of this chapter plus Lemmas 4.1, 5.1, and 6.3.

■

Chapter 7

The Intersection Problem for Latin Squares of Order 12 with Holes of Size 3

In this chapter a complete solution of the intersection problem for latin squares of order 12 with holes of size 3 in given. The necessary condition for a pair of latin squares of order 12 with holes of size 3 to have k entries in common is k $\in$ {0, 1, 2,.......,108} \ {103, 105, 106, 107}. Using a Java program and manual techniques we found latin squares B_1, B_2, B_3; L_1, L_2,.........., L_{76}, L_{77} such that for each k $\in$ {0, 1, 2,......, 108} \ {103, 105, 106, 107} there is a B_i and L_j such that $|B_i \bigcap L_j| = k$. These are given in tabular form at the end of this chapter.

The following is a list of the latin squares B_1, B_2, B_3; L_1, L_2,.........., L_{104}, L_{105}:

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	12	11	4	6	5	1	10	3	8	9	2
12	11	8	6	5	4	3	2	10	9	1	7
10	9	12	5	4	6	11	1	2	7	8	3
5	6	10	11	12	1	7	9	8	3	2	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
9	8	7	1	3	2	5	6	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	2	5	6	12	11	10
4	7	5	2	9	8	6	3	1	11	10	12

B_1

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	9	8	7	3	1	4
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
5	9	7	1	3	8	6	2	4	12	11	10
8	4	9	3	1	7	5	6	2	11	10	12

B_2

1	3	2	10	8	9	4	11	12	7	5	6
3	2	1	7	9	8	11	12	10	5	6	4
2	1	3	8	7	11	12	10	5	6	4	9
9	11	12	4	6	5	10	2	3	1	7	8
11	12	10	6	5	4	2	3	1	8	9	7
12	10	7	5	4	6	3	1	11	9	8	2
10	5	6	1	11	12	7	9	8	4	2	3
5	6	4	11	12	10	7	9	8	2	3	1
6	4	11	12	10	2	8	7	9	3	1	5
4	7	8	9	2	3	1	5	6	10	12	11
7	8	9	2	3	1	5	6	4	12	11	10
8	9	5	3	1	7	6	4	2	11	10	12

B_3

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
12	11	8	6	5	4	3	2	10	9	1	7
10	9	12	5	4	6	11	1	2	7	8	3
7	12	11	4	6	5	1	10	3	8	9	2
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
5	6	10	11	12	1	7	9	8	3	2	4
8	4	9	3	1	7	2	5	6	12	11	10
4	7	5	2	9	8	6	3	1	11	10	12
9	8	7	1	3	2	5	6	4	10	12	11

L_1

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	9	8	7	3	1	4
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
5	9	7	1	3	8	2	6	4	12	11	10
8	4	9	3	1	7	5	6	2	11	10	12

L_2

2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
7	11	12	4	6	5	1	10	3	8	9	2
12	8	10	6	5	4	11	3	2	9	1	7
1	12	11	5	4	6	3	2	10	7	8	1
11	10	6	12	1	2	7	9	8	3	4	5
6	5	4	10	11	12	7	9	8	1	2	3
10	6	5	11	12	1	8	7	9	2	3	4
5	9	7	1	3	8	2	6	4	10	12	11
8	4	9	3	2	7	5	1	6	12	11	10
4	7	8	2	9	3	6	5	1	11	10	12

L_3

2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
7	10	12	4	6	5	11	3	1	8	9	2
12	11	8	6	5	4	3	1	10	9	2	7
11	12	9	5	4	6	1	10	2	7	8	3
10	6	11	12	2	3	7	9	8	1	5	4
5	4	6	10	11	12	7	9	8	2	3	1
6	5	10	11	12	2	8	7	9	3	1	4
9	8	5	3	1	7	6	2	4	10	12	11
8	7	4	2	9	1	5	6	3	12	11	10
4	9	7	1	3	8	2	5	6	11	10	12

L_4

2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
7	10	12	4	6	5	11	1	3	8	9	2
12	11	8	6	5	4	2	3	10	9	1	7
11	12	9	5	4	6	1	10	2	7	8	3
10	6	11	12	3	2	7	9	8	1	4	5
5	4	6	10	11	12	7	9	8	2	3	1
6	5	10	11	12	1	8	7	9	3	2	4
9	8	5	3	1	7	6	2	4	10	12	11
8	7	4	2	9	3	5	6	1	12	11	10
4	9	7	1	2	8	3	5	6	11	10	12

L_5

2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
7	8	12	4	6	5	11	10	2	9	3	1
12	11	10	6	5	4	2	3	1	8	9	7
9	12	11	5	4	6	1	2	10	7	8	3
10	6	5	11	12	3	7	9	8	1	2	4
11	10	6	12	3	1	7	9	8	2	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	3	1	2
5	9	7	3	2	8	6	1	4	10	12	11
8	4	9	2	1	7	5	6	3	12	11	10
4	7	8	1	9	2	3	5	6	11	10	12

L_6

2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
7	8	12	4	6	5	11	10	2	9	3	1
12	11	10	6	5	4	2	3	1	8	9	7
9	12	11	5	4	6	1	2	10	7	8	3
10	6	5	11	12	3	7	9	8	1	2	4
11	10	6	12	3	1	7	9	8	2	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	3	1	2
5	9	7	3	2	8	6	1	4	10	12	11
8	4	9	2	1	7	5	6	3	12	11	10
4	7	8	1	9	2	3	5	6	11	10	12

L_7

2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
12	8	10	6	5	4	11	3	2	9	1	7
7	11	12	4	6	5	1	10	3	8	9	2
1	12	11	5	4	6	3	2	10	7	8	1
11	10	6	12	1	2	7	9	8	3	4	5
6	5	4	10	11	12	7	9	8	1	2	3
10	6	5	11	12	1	8	7	9	2	3	4
5	9	7	1	3	8	2	6	4	10	12	11
8	4	9	3	2	7	5	1	6	12	11	10
4	7	8	2	9	3	6	5	1	11	10	12

L_8

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	9	8	7	3	1	4
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
5	9	7	1	3	8	2	6	4	12	11	10
8	4	9	3	1	7	5	6	2	11	10	12

L_9

2	1	3	9	10	11	12	4	5	7	6	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	5	4	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	6	5	9
7	10	12	4	6	5	11	1	3	9	8	2
12	11	8	6	5	4	2	3	10	1	9	7
11	12	9	5	4	6	1	10	2	8	7	3
10	6	11	12	3	2	7	9	8	4	1	5
5	4	6	10	11	12	7	9	8	3	2	1
6	5	10	11	12	1	8	7	9	2	3	4
9	8	5	3	1	7	6	2	4	12	10	11
8	7	4	2	9	3	5	6	1	11	12	10
4	9	7	1	2	8	3	5	6	10	11	12

L_{10}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	9	8	7	3	1	4
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
5	9	7	1	3	8	2	6	4	12	11	10
8	4	9	3	1	7	5	6	2	11	10	12

L_{11}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	11	12	4	6	5	1	10	3	8	9	2
12	8	10	6	5	4	11	3	2	9	1	7
1	12	11	5	4	6	3	2	10	7	8	1
11	10	6	12	1	2	7	9	8	3	4	5
6	5	4	10	11	12	7	9	8	1	2	3
10	6	5	11	12	1	8	7	9	2	3	4
5	9	7	1	3	8	2	6	4	10	12	11
8	4	9	3	2	7	5	1	6	12	11	10
4	7	8	2	9	3	6	5	1	11	10	12

L_{12}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
10	6	5	11	12	2	9	8	7	3	1	4
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
5	9	7	1	3	8	2	6	4	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	11	10	12

L_{13}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
10	6	5	11	12	2	9	8	7	3	1	4
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
5	9	7	1	3	8	2	6	4	12	11	10
8	4	9	3	1	7	5	6	2	11	10	12

L_{14}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
10	12	11	6	5	4	2	3	1	8	9	7
12	11	9	5	4	6	1	10	3	7	8	2
5	6	10	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	7	9	8	1	4	5
6	4	5	10	11	12	8	7	9	2	3	1
9	5	7	1	3	8	6	4	4	10	12	11
8	9	4	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{15}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	9	8	7	2	3	1
10	8	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{16}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	9	8	7	2	3	1
10	8	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10

L_{17}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	9	8	7	2	3	1
10	8	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10

L_{18}

2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
10	12	11	6	5	4	1	2	3	8	9	7
12	11	9	5	4	6	3	10	1	7	8	2
5	6	10	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	7	9	8	1	4	5
6	4	5	10	11	12	8	7	9	2	3	1
4	9	7	3	1	8	5	6	2	12	11	10
8	5	4	1	9	7	2	3	6	11	10	12
9	7	8	2	3	1	6	5	4	10	12	11

L_{19}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
10	6	5	11	12	2	9	8	7	3	1	4
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
5	9	7	1	3	8	2	6	4	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	11	10	12

L_{20}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
10	8	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
6	5	4	10	11	12	9	8	7	2	3	1
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11

L_{21}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
10	6	5	11	12	2	9	8	7	3	1	4
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
5	9	7	1	3	8	2	6	4	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	11	10	12

L_{22}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	9	8	7	2	3	1
10	8	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{23}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	9	8	7	2	3	1
10	8	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{24}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	9	8	7	2	3	1
10	8	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{25}

3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
7	8	12	4	6	5	11	10	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	2	10	3	7	8	1
12	11	10	5	4	6	1	3	2	8	9	7
10	6	5	11	12	2	7	9	8	1	3	4
11	10	6	12	3	1	9	8	7	2	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	3	1	2
4	9	7	3	2	8	5	6	1	10	12	11
8	4	9	2	1	7	3	5	6	12	11	10
5	7	8	1	9	3	6	2	4	11	10	12

L_{26}

1	3	2	8	7	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	7	8	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	10	9	11	12	4	5	6	7	8
7	12	11	6	4	5	1	10	3	8	9	2
12	11	8	5	6	4	3	2	10	9	1	7
10	9	12	4	5	6	11	1	2	7	8	3
5	6	10	12	11	1	7	9	8	3	2	4
11	10	6	2	12	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	11	10	12	8	7	9	2	3	1
9	8	7	3	1	2	5	6	4	10	12	11
8	4	9	1	3	7	2	5	6	12	11	10
4	7	5	9	2	8	6	3	1	11	10	12

L_{27}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	9	8	7	3	1	4
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
5	9	7	1	3	8	2	6	4	12	11	10
8	4	9	3	1	7	5	6	2	11	10	12

L_{28}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	12	11	4	6	5	1	10	3	8	9	2
12	11	8	6	5	4	3	2	10	9	1	7
10	9	12	5	4	6	11	1	2	7	8	3
5	6	10	11	12	1	7	9	8	3	2	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
9	8	7	1	3	2	5	6	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	2	5	6	12	11	10
4	7	5	2	9	8	6	3	1	11	10	12

L_{29}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	5
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	11	12	4	6	5	1	10	3	8	9	2
12	8	10	6	5	4	11	3	2	9	1	7
1	12	11	5	4	6	3	2	10	7	8	1
11	10	6	12	1	2	7	9	8	3	4	5
6	5	4	10	11	12	7	9	8	1	2	3
10	6	5	11	12	1	8	7	9	2	3	4
5	9	7	1	3	8	2	6	4	10	12	11
8	4	9	3	2	7	5	1	6	12	11	10
4	7	8	2	9	3	6	5	1	11	10	12

L_{30}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	10	12	4	6	5	11	3	1	8	9	2
12	11	8	6	5	4	3	1	10	9	2	7
11	12	9	5	4	6	1	10	2	7	8	3
10	6	11	12	2	3	7	9	8	1	5	4
5	4	6	10	11	12	7	9	8	2	3	1
6	5	10	11	12	2	8	7	9	3	1	4
9	8	5	3	1	7	6	2	4	10	12	11
8	7	4	2	9	1	5	6	3	12	11	10
4	9	7	1	3	8	2	5	6	11	10	12

L_{31}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	10	12	4	6	5	11	1	3	8	9	2
12	11	8	6	5	4	2	3	10	9	1	7
11	12	9	5	4	6	1	10	2	7	8	3
10	6	11	12	3	2	7	9	8	1	4	5
5	4	6	10	11	12	7	9	8	2	3	1
6	5	10	11	12	1	8	7	9	3	2	4
9	8	5	3	1	7	6	2	4	10	12	11
8	7	4	2	9	3	5	6	1	12	11	10
4	9	7	1	2	8	3	5	6	11	10	12

L_{32}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	10	2	9	3	1
12	11	10	6	5	4	2	3	1	8	9	7
9	12	11	5	4	6	1	2	10	7	8	3
10	6	5	11	12	3	7	9	8	1	2	4
11	10	6	12	3	1	7	9	8	2	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	3	1	2
5	9	7	3	2	8	6	1	4	10	12	11
8	4	9	2	1	7	5	6	3	12	11	10
4	7	8	1	9	2	3	5	6	11	10	12

L_{33}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	2	10	9	3	1
12	11	10	6	5	4	2	3	1	8	9	7
9	12	11	5	4	6	1	10	2	7	8	3
10	6	5	11	12	3	7	9	8	1	2	4
11	10	6	12	3	1	9	8	7	2	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	3	1	2
5	9	7	3	2	8	6	1	4	10	12	11
8	4	9	2	1	7	5	6	3	12	11	10
4	7	8	1	9	2	3	5	6	11	10	12

L_{34}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	2	10	9	1	3
12	11	10	6	5	4	2	3	1	8	9	7
11	12	9	5	4	6	3	10	2	7	8	1
10	6	5	11	12	1	7	9	8	3	4	2
4	10	6	12	11	3	9	8	7	1	2	5
6	5	11	10	1	12	8	7	9	2	3	4
8	9	7	1	3	2	5	6	4	10	12	11
9	4	8	3	2	7	1	5	6	12	11	10
5	7	4	2	9	8	6	1	3	11	10	12

L_{35}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	3	2
12	11	10	6	5	4	2	3	1	8	9	7
9	12	11	5	4	6	3	10	2	7	8	1
10	6	5	11	12	1	7	9	8	3	2	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	1	3
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	2	1	7	5	6	3	12	11	10
4	7	8	3	9	2	1	5	6	11	10	12

L_{36}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
12	11	10	6	5	4	2	3	1	8	9	7
9	12	11	5	4	6	1	10	3	7	8	2
10	6	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{37}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
12	11	10	6	5	4	2	3	1	8	9	7
11	12	9	5	4	6	1	10	3	7	8	2
6	10	11	12	2	3	7	9	8	1	4	5
5	4	6	10	11	12	9	8	7	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
8	9	4	3	1	7	5	6	2	10	12	11
4	7	8	2	9	1	3	5	6	12	11	10
9	5	7	1	3	8	6	2	4	11	10	12

L_{38}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
12	10	11	6	5	4	2	3	1	8	9	7
11	12	9	5	4	6	1	10	3	7	8	2
5	6	10	11	12	2	7	9	8	3	1	4
10	11	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	4	5	10	11	12	8	7	9	2	3	1
8	9	4	3	1	7	5	6	2	10	12	11
4	7	8	2	9	1	3	5	6	12	11	10
9	5	7	1	3	8	6	2	4	11	10	12

L_{39}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
12	11	10	6	5	4	2	3	1	8	9	7
11	12	9	5	4	6	1	10	3	7	8	2
5	6	10	11	12	2	7	9	8	3	1	4
10	11	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	4	5	10	11	12	8	7	9	2	3	1
9	5	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	9	4	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{40}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
10	12	11	6	5	4	2	3	1	8	9	7
12	11	9	5	4	6	1	10	3	7	8	2
5	6	10	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	4	5	10	11	12	8	7	9	2	3	1
8	9	4	3	1	7	5	6	2	10	12	11
4	7	8	2	9	1	3	5	6	12	11	10
9	5	7	1	3	8	6	2	4	11	10	12

L_{41}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
10	12	11	6	5	4	2	3	1	8	9	7
12	11	9	5	4	6	1	10	3	7	8	2
5	6	10	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	4	5	10	11	12	8	7	9	2	3	1
9	5	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	9	4	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{42}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
10	12	11	6	5	4	2	3	1	8	9	7
12	11	9	5	4	6	1	10	3	7	8	2
5	6	10	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	4	5	10	11	12	8	7	9	2	3	1
8	9	4	1	3	7	5	6	2	10	12	11
8	7	4	2	9	1	3	5	6	12	11	10
9	5	8	1	3	7	6	2	4	11	10	12

L_{43}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
10	12	11	6	5	4	1	2	3	8	9	7
12	11	9	5	4	6	3	10	2	7	8	1
5	6	10	11	12	2	7	9	8	1	3	4
11	10	6	12	3	1	9	8	7	2	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	3	1	2
8	9	7	1	2	3	5	6	4	10	12	11
9	4	8	3	1	7	2	5	6	12	11	10
4	7	5	2	9	8	6	3	1	11	10	12

L_{44}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
10	12	11	6	5	4	1	2	3	8	9	7
12	11	9	5	4	6	3	10	1	7	8	2
5	6	10	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	4	5	10	11	12	8	7	9	2	3	1
8	9	4	1	3	7	5	6	2	10	12	11
4	7	8	3	9	1	2	5	6	12	11	10
9	5	7	2	1	8	6	3	4	11	10	12

L_{45}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
10	12	11	6	5	4	1	2	3	8	9	7
12	11	9	5	4	6	3	10	1	7	8	2
5	6	10	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	4	5	10	11	12	8	7	9	2	3	1
4	9	7	3	1	8	5	6	2	10	12	11
8	5	4	1	9	7	2	3	6	12	11	10
9	7	8	2	3	1	6	5	4	11	10	12

L_{46}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
10	12	11	6	5	4	1	2	3	8	9	7
12	11	9	5	4	6	3	10	1	7	8	2
5	6	10	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	4	5	10	11	12	8	7	9	2	3	1
4	9	7	1	3	8	5	6	2	10	12	11
8	7	4	3	9	1	2	5	6	12	11	10
9	5	8	2	1	7	6	3	4	11	10	12

L_{47}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
10	12	11	6	5	4	1	2	3	8	9	7
12	11	9	5	4	6	3	10	1	7	8	2
4	10	6	11	2	12	7	9	8	1	3	5
6	5	10	12	11	3	9	8	7	2	4	1
11	6	5	10	12	2	8	7	9	3	1	4
9	4	7	1	3	8	5	6	2	10	12	11
8	9	4	3	1	7	2	5	6	12	11	10
5	7	8	2	9	1	6	3	4	11	10	12

L_{48}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
10	12	11	6	5	4	1	2	3	8	9	7
12	11	9	5	4	6	3	10	1	7	8	2
4	10	6	11	2	12	7	9	8	1	3	5
6	5	10	12	11	3	9	8	7	2	4	1
11	6	5	10	12	2	8	7	9	3	1	4
8	9	4	1	3	7	5	6	2	10	12	11
9	4	7	3	1	8	2	5	6	12	11	10
5	7	8	2	9	1	6	3	4	11	10	12

L_{49}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
10	12	11	6	5	4	1	2	3	8	9	7
12	11	9	5	4	6	3	10	1	7	8	2
4	6	10	11	2	12	7	9	8	1	3	5
6	10	5	12	11	3	9	8	7	2	4	1
11	5	6	10	12	2	8	7	9	3	1	4
9	4	7	1	3	8	5	6	2	10	12	11
8	9	4	3	1	7	2	5	6	12	11	10
5	7	8	2	9	1	6	3	4	11	10	12

L_{50}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	3	10	1	7	8	2
12	11	10	5	4	6	1	2	3	8	9	7
10	6	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
4	9	7	1	3	8	5	6	2	10	12	11
8	4	9	3	1	7	2	5	6	12	11	10
5	7	8	2	9	1	6	3	4	11	10	12

L_{51}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	2	10	3	7	8	1
12	11	10	5	4	6	1	3	2	8	9	7
10	6	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	1	3	9	8	7	2	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	3	1	2
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	2	7	5	6	1	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{52}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	2	10	3	7	8	1
12	11	10	5	4	6	1	3	2	8	9	7
10	6	5	11	12	2	7	9	8	1	3	4
11	10	6	12	3	1	9	8	7	2	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	3	1	2
4	9	7	3	2	8	5	6	1	10	12	11
8	4	9	2	1	7	3	5	6	12	11	10
5	7	8	1	9	3	6	2	4	11	10	12

L_{53}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	3	2	1	8	9	7
10	6	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
4	9	7	1	3	8	5	6	2	10	12	11
8	4	9	3	1	7	2	5	6	12	11	10
5	7	8	2	9	1	6	3	4	11	10	12

L_{54}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
10	6	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{55}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	3	2	1	8	9	7
10	6	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
4	9	7	1	3	8	2	5	6	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
5	7	8	2	9	1	6	3	4	11	10	12

L_{56}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
10	6	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
4	9	7	1	3	8	5	6	2	10	12	11
8	4	9	2	1	7	3	5	6	12	11	10
5	7	8	3	9	1	6	2	4	11	10	12

L_{57}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	3	2	1	8	9	7
10	6	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
4	7	9	1	3	8	5	6	2	10	12	11
8	4	7	3	9	1	2	5	6	12	11	10
5	9	8	2	1	7	6	3	4	11	10	12

L_{58}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
10	6	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
4	7	9	3	1	8	5	6	2	10	12	11
8	4	7	2	9	1	3	5	6	12	11	10
5	9	8	1	3	7	6	2	4	11	10	12

L_{59}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
10	6	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
4	7	8	3	9	1	5	6	2	10	12	11
8	4	9	2	1	7	3	5	6	12	11	10
5	9	7	1	3	8	6	2	4	11	10	12

L_{60}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	10	4	11	2	12	7	9	8	1	3	5
10	5	6	12	11	3	9	8	7	2	4	1
11	6	5	10	12	2	8	7	9	3	1	4
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{61}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
10	6	5	11	12	2	7	9	8	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
6	5	4	10	11	12	8	7	9	2	3	1
5	7	8	3	9	1	6	2	4	10	12	11
8	4	9	1	3	7	5	6	2	12	11	10
4	9	7	2	1	8	3	5	6	11	10	12

L_{62}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	10	4	11	2	12	7	9	8	1	3	5
10	5	6	12	11	3	9	8	7	2	4	1
11	6	5	10	12	2	8	7	9	3	1	4
4	9	7	1	3	8	5	6	2	10	12	11
8	4	9	2	1	7	3	5	6	12	11	10
5	7	8	3	9	1	6	2	4	11	10	12

L_{63}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{64}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	10	4	11	2	12	7	9	8	1	3	5
10	5	6	12	11	3	9	8	7	2	4	1
11	6	5	10	12	2	8	7	9	3	1	4
4	7	9	3	1	8	5	6	2	10	12	11
8	4	7	2	9	1	3	5	6	12	11	10
5	9	8	1	3	7	6	2	4	11	10	12

L_{65}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
4	9	7	1	3	8	5	6	2	10	12	11
8	4	9	3	1	7	3	5	6	12	11	10
5	7	8	3	9	1	6	2	4	11	10	12

L_{66}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	10	4	11	2	12	7	9	8	1	3	5
10	5	6	12	11	2	9	8	7	3	1	4
11	6	5	10	12	3	8	7	9	2	4	1
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{67}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
4	7	9	3	1	8	5	6	2	10	12	11
8	4	7	2	9	1	3	5	6	12	11	10
5	9	8	1	3	7	6	2	4	11	10	12

L_{68}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
4	7	8	3	9	1	5	6	2	10	12	11
8	4	9	2	1	7	3	5	6	12	11	10
5	9	7	1	3	8	6	2	4	11	10	12

L_{69}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
4	7	9	1	3	8	5	6	2	10	12	11
8	4	7	2	9	1	3	5	6	12	11	10
5	9	8	3	1	7	6	2	4	11	10	12

L_{70}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
5	7	8	3	9	1	6	2	4	10	12	11
8	4	9	1	3	7	5	6	2	12	11	10
4	9	7	2	1	8	3	5	6	11	10	12

L_{71}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
4	7	9	1	3	8	5	2	6	10	12	11
8	4	7	3	9	1	6	5	2	12	11	10
5	9	8	2	1	7	3	6	4	11	10	12

L_{72}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
5	9	7	1	3	8	6	2	4	11	10	12

L_{73}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
4	7	9	1	3	8	5	2	6	10	12	11
5	9	8	2	1	7	3	6	4	12	11	10
8	4	7	3	9	1	6	5	2	11	10	12

L_{74}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
4	7	8	3	9	1	5	2	6	10	12	11
8	4	9	1	3	7	6	5	2	12	11	10
5	9	7	2	1	8	3	6	4	11	10	12

L_{75}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
4	7	9	3	1	8	5	2	6	10	12	11
8	9	7	2	3	1	6	5	4	12	11	10
5	4	8	1	9	7	3	6	2	11	10	12

L_{76}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
8	4	9	1	3	7	5	6	2	12	11	10
5	9	7	3	1	8	6	2	4	11	10	12

L_{77}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
5	7	8	3	9	1	6	2	4	10	12	11
4	9	7	1	3	8	5	6	2	12	11	10
8	4	9	2	1	7	3	5	6	11	10	12

L_{78}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
5	4	8	1	9	7	5	6	2	10	12	11
8	9	7	2	3	1	6	5	4	12	11	10
4	7	9	3	1	8	5	6	2	11	10	12

L_{79}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
4	7	8	3	9	1	5	2	6	10	12	11
5	9	7	2	1	8	3	6	4	12	11	10
8	4	9	1	3	7	6	5	2	11	10	12

L_{80}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
8	4	9	2	1	7	3	5	6	10	12	11
5	9	7	1	3	8	6	2	4	12	11	10
4	7	8	3	9	1	5	6	2	11	10	12

L_{81}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
5	9	7	1	3	8	6	2	4	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
4	7	8	2	9	1	3	5	6	11	10	12

L_{82}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
4	7	8	3	9	1	5	6	2	10	12	11
5	9	7	1	3	8	6	2	4	12	11	10
8	4	9	2	1	7	3	5	6	11	10	12

L_{83}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	9	7	1	3	8	5	6	2	10	12	11
8	4	9	2	1	7	3	5	6	12	11	10
5	7	8	3	9	1	6	2	4	11	10	12

L_{84}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	10	4	11	2	12	7	9	8	1	3	5
11	5	6	10	12	3	8	7	9	2	4	1
10	6	5	12	11	2	9	8	7	3	1	4
5	4	8	1	9	7	3	2	6	10	12	11
8	9	7	2	3	1	6	5	4	12	11	10
4	7	9	3	1	8	5	6	2	11	10	12

L_{85}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	9	3	1	8	5	6	2	10	12	11
8	4	7	2	9	1	3	5	6	12	11	10
5	9	8	1	3	7	6	2	4	11	10	12

L_{86}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	8	3	9	1	5	6	2	10	12	11
8	4	9	2	1	7	3	5	6	12	11	10
5	9	7	1	3	8	6	2	4	11	10	12

L_{87}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	9	1	3	8	5	6	2	10	12	11
8	4	7	2	9	1	3	5	6	12	11	10
5	9	8	3	1	7	6	2	4	11	10	12

L_{88}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
5	7	8	3	9	1	6	2	4	10	12	11
8	4	9	1	3	7	5	6	2	12	11	10
4	9	7	2	1	8	3	5	6	11	10	12

L_{89}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	9	8	7	3	1	4
11	10	6	12	2	3	8	7	9	1	4	5
4	7	9	1	3	8	5	2	6	10	12	11
8	4	7	3	9	1	6	5	2	12	11	10
5	9	8	2	1	7	3	6	4	11	10	12

L_{90}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
8	4	9	3	1	7	5	6	2	12	11	10
5	9	7	1	3	8	6	2	4	11	10	12

L_{91}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	9	1	3	8	5	2	6	10	12	11
5	9	8	2	1	7	3	6	4	12	11	10
8	4	7	3	9	1	6	5	2	11	10	12

L_{92}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	8	3	9	1	5	2	6	10	12	11
8	4	9	1	3	7	6	5	2	12	11	10
5	9	7	2	1	8	3	6	4	11	10	12

L_{93}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	9	3	1	8	5	2	6	10	12	11
8	9	7	2	3	1	6	5	4	12	11	10
5	4	8	1	9	7	3	6	2	11	10	12

L_{94}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
8	4	9	1	3	7	5	6	2	12	11	10
5	9	7	3	1	8	6	2	4	11	10	12

L_{95}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
5	7	8	3	9	1	6	2	4	10	12	11
4	9	7	1	3	8	5	6	2	12	11	10
8	4	9	2	1	7	3	5	6	11	10	12

L_{96}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
5	4	8	1	9	7	3	2	6	10	12	11
8	9	7	2	3	1	6	5	4	12	11	10
4	7	9	3	1	8	5	6	2	11	10	12

L_{97}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	8	3	9	1	5	2	6	10	12	11
5	9	7	2	1	8	3	6	4	12	11	10
8	4	9	1	3	7	6	5	2	11	10	12

L_{98}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
8	4	9	2	1	7	3	5	6	10	12	11
5	9	7	1	3	8	6	2	4	12	11	10
4	7	8	3	9	1	5	6	2	11	10	12

L_{99}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	8	3	9	1	2	5	6	10	12	11
5	9	7	2	1	8	6	3	4	12	11	10
8	4	9	1	3	7	5	6	2	11	10	12

L_{100}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	8	3	9	1	5	6	2	10	12	11
5	9	7	1	3	8	6	2	4	12	11	10
8	4	9	2	1	7	3	5	6	11	10	12

L_{101}

1	3	2	10	8	9	4	11	12	7	5	6
3	2	1	8	7	9	11	12	10	5	6	4
2	1	3	7	8	11	12	10	5	6	4	9
9	11	12	4	6	5	10	2	3	1	7	8
11	12	10	6	5	4	2	3	1	8	9	7
12	10	7	5	4	6	3	1	11	9	8	2
10	5	6	1	11	12	7	9	8	4	2	3
5	6	4	11	12	10	7	9	8	2	3	1
6	4	11	12	10	2	8	7	9	3	1	5
4	7	8	9	2	3	1	5	6	10	12	11
7	8	9	2	3	1	5	6	4	12	11	10
8	9	5	3	1	7	6	4	2	11	10	12

L_{102}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
5	9	7	1	3	8	6	2	4	12	11	10
8	4	9	3	1	7	5	6	2	11	10	12

L_{103}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
5	9	7	3	1	8	6	2	4	12	11	10
8	4	9	1	3	7	5	6	2	11	10	12

L_{104}

1	3	2	7	8	9	10	11	12	4	5	6
3	2	1	8	7	10	4	12	11	5	6	9
2	1	3	9	10	11	12	4	5	6	7	8
7	8	12	4	6	5	11	1	10	9	2	3
9	12	11	6	5	4	1	10	3	7	8	2
12	11	10	5	4	6	2	3	1	8	9	7
6	5	4	10	11	12	7	9	8	2	3	1
10	6	5	11	12	2	8	7	9	3	1	4
11	10	6	12	2	3	9	8	7	1	4	5
4	7	8	2	9	1	3	5	6	10	12	11
5	9	7	1	3	8	6	2	4	12	11	10
8	4	9	3	1	7	5	6	2	11	10	12

L_{105}

k	$B_i \bigcap L_j$	k	$B_i \bigcap L_j$	k	$B_i \bigcap L_j$	k	$B_i \bigcap L_j$	k	$B_i \bigcap L_j$
0	$B_2 \bigcap L_1$	21	$B_1 \bigcap L_{22}$	42	$B_2 \bigcap L_{43}$	63	$B_2 \bigcap L_{64}$	84	$B_2 \bigcap L_{85}$
1	$B_1 \bigcap L_2$	22	$B_2 \bigcap L_{23}$	43	$B_2 \bigcap L_{44}$	64	$B_2 \bigcap L_{65}$	85	$B_2 \bigcap L_{86}$
2	$B_1 \bigcap L_3$	23	$B_2 \bigcap L_{24}$	44	$B_2 \bigcap L_{45}$	65	$B_2 \bigcap L_{66}$	86	$B_2 \bigcap L_{87}$
3	$B_1 \bigcap L_4$	24	$B_2 \bigcap L_{25}$	45	$B_2 \bigcap L_{46}$	66	$B_2 \bigcap L_{67}$	87	$B_2 \bigcap L_{88}$
4	$B_2 \bigcap L_5$	25	$B_2 \bigcap L_{26}$	46	$B_2 \bigcap L_{47}$	67	$B_2 \bigcap L_{68}$	88	$B_2 \bigcap L_{89}$
5	$B_1 \bigcap L_6$	26	$B_2 \bigcap L_{27}$	47	$B_2 \bigcap L_{48}$	68	$B_2 \bigcap L_{69}$	89	$B_2 \bigcap L_{90}$
6	$B_1 \bigcap L_7$	27	$B_1 \bigcap L_{28}$	48	$B_2 \bigcap L_{49}$	69	$B_2 \bigcap L_{70}$	90	$B_2 \bigcap L_{91}$
7	$B_1 \bigcap L_8$	28	$B_2 \bigcap L_{29}$	49	$B_2 \bigcap L_{50}$	70	$B_2 \bigcap L_{71}$	91	$B_2 \bigcap L_{92}$
8	$B_1 \bigcap L_9$	29	$B_2 \bigcap L_{30}$	50	$B_2 \bigcap L_{51}$	71	$B_2 \bigcap L_{72}$	92	$B_2 \bigcap L_{93}$
9	$B_1 \bigcap L_{10}$	30	$B_2 \bigcap L_{31}$	51	$B_2 \bigcap L_{52}$	72	$B_2 \bigcap L_{73}$	93	$B_2 \bigcap L_{94}$
10	$B_2 \bigcap L_{11}$	31	$B_2 \bigcap L_{32}$	52	$B_2 \bigcap L_{53}$	73	$B_2 \bigcap L_{74}$	94	$B_2 \bigcap L_{95}$
11	$B_1 \bigcap L_{12}$	32	$B_2 \bigcap L_{33}$	53	$B_2 \bigcap L_{54}$	74	$B_2 \bigcap L_{75}$	95	$B_2 \bigcap L_{96}$
12	$B_1 \bigcap L_{13}$	33	$B_2 \bigcap L_{34}$	54	$B_2 \bigcap L_{55}$	75	$B_2 \bigcap L_{76}$	96	$B_2 \bigcap L_{97}$
13	$B_1 \bigcap L_{14}$	34	$B_2 \bigcap L_{35}$	55	$B_2 \bigcap L_{56}$	76	$B_2 \bigcap L_{77}$	97	$B_2 \bigcap L_{98}$
14	$B_1 \bigcap L_{15}$	35	$B_2 \bigcap L_{36}$	56	$B_2 \bigcap L_{57}$	77	$B_2 \bigcap L_{78}$	98	$B_2 \bigcap L_{99}$
15	$B_1 \bigcap L_{16}$	36	$B_2 \bigcap L_{37}$	57	$B_2 \bigcap L_{58}$	78	$B_2 \bigcap L_{79}$	99	$B_2 \bigcap L_{100}$
16	$B_2 \bigcap L_{17}$	37	$B_2 \bigcap L_{38}$	58	$B_2 \bigcap L_{59}$	79	$B_2 \bigcap L_{80}$	100	$B_2 \bigcap L_{101}$
17	$B_2 \bigcap L_{18}$	38	$B_2 \bigcap L_{39}$	59	$B_2 \bigcap L_{60}$	80	$B_2 \bigcap L_{81}$	101	$B_3 \bigcap L_{102}$
18	$B_2 \bigcap L_{19}$	39	$B_2 \bigcap L_{40}$	60	$B_2 \bigcap L_{61}$	81	$B_2 \bigcap L_{82}$	102	$B_2 \bigcap L_{103}$
19	$B_1 \bigcap L_{20}$	40	$B_2 \bigcap L_{41}$	61	$B_2 \bigcap L_{62}$	82	$B_2 \bigcap L_{83}$	104	$B_2 \bigcap L_{104}$
20	$B_1 \bigcap L_{21}$	41	$B_2 \bigcap L_{42}$	62	$B_2 \bigcap L_{63}$	83	$B_2 \bigcap L_{84}$	108	$B_2 \bigcap L_{105}$

Lemma 7.1 The spectrum for 12×12 latin squares with holes of size 3 having k entries in common outside of the holes is $\{0, 1, 2, \ldots\ldots, 108\} \setminus \{103, 105, 106, 107\}$. ■

Chapter 8

The Intersection Problem for Latin Squares of Order 15 with Holes of Size 3

In this chapter a complete solution of the intersection problem for latin squares of order 15 with holes of size 3 is given. The necessary condition for a pair of latin squares of order 12 with holes of size 3 to have k entries in common is k ∈ {0, 1, 2,.......,180} \ {175, 177, 178, 179}. In [1], Hung Lin Fu constructed a pair of 7 × 7 latin squares A and B as shown below having k entries in common outside of the filled in cells for all k ∈ {0, 2, 4,....., 22, 24, 25, 26, 28, 29, 32}.

A =

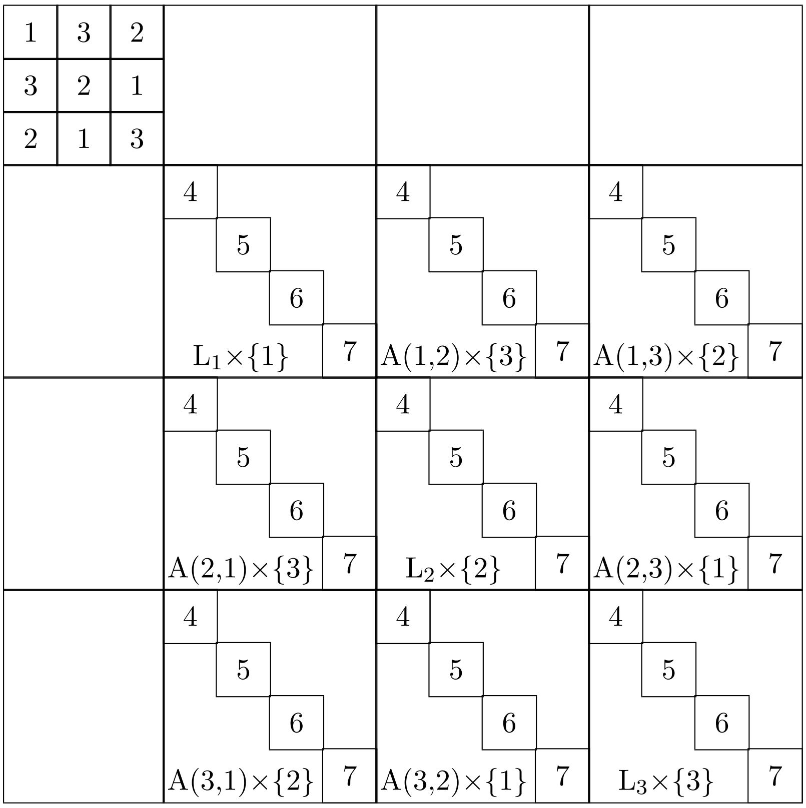
1	3	2				
3	2	1				
2	1	3				
			4			
				5		
					6	
						7

B =

1	3	2				
3	2	1				
2	1	3				
			4			
				5		
					6	
						7

In what follows if L is a latin square of the form A or B we will denote by L × {i} the latin square obtained from L by replacing each of the symbols 4, 5, 6, and 7 with the ordered pairs (4, i), (5, i), (6, i), and (7, i). Further, let A(i, j) be any 4 × 4 idempotent latin square based on 4, 5, 6, and 7 and denote by A(i, j) × {i} the latin square obtained from A(i, j) by replacing each of the symbols 4, 5, 6, and 7 with the ordered pairs (4, i), (5, i), (6, i), and (7, i). Let L_1, L_2, and L_3 be any three 7×7 latin squares as defined above and denote by F the 15×15 latin square defined as follows:

F =



where A(1,2), A(1,3), A(2,1), A(2,3), A(3,1), and A(3,2) are any 4×4 idempotent latin squares based on 4, 5, 6, and 7. Then F is a 15×15 latin square with holes of size 3: {1, 2, 3}, {(4,1), (4,2), (4,3)}, {(5,1), (5,2), (5,3)}, {(6,1), (6,2), (6,3)}, {(7,1), (7,2), (7,3)}.

If F_1 and F_2 are any two such 15×15 latin squares as defined above we have the following freedom: $|L_1 \bigcap L'_1| = x_1$, $|L_2 \bigcap L'_2| = x_2$, $|L_3 \bigcap L'_3| = x_3$, $|(A(1,2)\times \{3\}) \bigcap (A'(1,2)\times\{3\})| = x_4$, $|(A(1,3)\times \{2\}) \bigcap (A'(1,3)\times\{2\})| = x_5$, $|(A(2,1)\times \{3\}) \bigcap (A'(2,1)\times\{3\})| = x_6$, $|(A(2,3)\times \{1\}) \bigcap (A'(2,3)\times\{1\})| = x_7$, $|(A(3,1)\times \{2\}) \bigcap (A'(3,1)\times\{2\})| = x_8$, $|(A(3,2)\times \{1\}) \bigcap (A'(3,2)\times\{1\})| = x_9$ where x_1, x_2, and $x_3 \in \{0, 2, 4, \ldots\ldots, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 32\}$ and $x_4, \ldots, x_9 \in \{0, 12\}$.

Example 8.1 (15 × 15 latin squares F_1 and F_2 with holes of size 3, $|F_1 \bigcap F_2| = 68$)

$L_1 =$

1	3	2	4	7	6	5
3	2	1	5	4	7	6
2	1	3	6	5	4	7
5	6	7	4	1	3	2
6	7	4	2	5	1	3
7	4	5	3	2	6	1
4	5	6	1	3	2	7

$L'_1 =$

1	3	2	6	7	4	5
3	2	1	4	5	6	7
2	1	3	5	4	7	6
5	7	6	4	3	1	2
4	6	7	2	5	3	1
7	5	4	1	2	6	3
6	4	5	3	1	2	7

$L_2 =$

1	3	2	6	7	4	5
3	2	1	4	5	6	7
2	1	3	5	4	7	6
5	7	6	4	3	1	2
4	6	7	2	5	3	1
7	5	4	1	2	6	3
6	4	5	3	1	2	7

$L'_2 =$

1	3	2	6	7	4	5
3	2	1	4	5	7	6
2	1	3	5	4	6	7
5	6	7	4	1	2	3
4	7	6	2	5	3	1
7	5	4	1	3	6	2
6	4	5	3	2	1	7

$L_3 =$

1	3	2	6	7	4	5
3	2	1	4	5	7	6
2	1	3	5	4	6	7
5	6	7	4	1	2	3
4	7	6	2	5	3	1
7	5	4	1	3	6	2
6	4	5	3	2	1	7

$L'_3 =$

1	3	2	4	7	6	5
3	2	1	5	4	7	6
2	1	3	6	5	4	7
5	6	7	4	1	3	2
6	7	4	2	5	1	3
7	4	5	3	2	6	1
4	5	6	1	3	2	7

A(1,2) =

4	6	7	5
7	5	4	6
5	7	6	4
6	4	5	7

A′(1,2) =

4	7	5	6
6	5	7	4
7	4	6	5
5	6	4	7

A(1,3) =

4	7	5	6
6	5	7	4
7	4	6	5
5	6	4	7

A′(1,3) =

4	6	7	5
7	5	4	6
5	7	6	4
6	4	5	7

A(2,1) =

4	7	5	6
6	5	7	4
7	4	6	5
5	6	4	7

A′(2,1) =

4	7	5	6
6	5	7	4
7	4	6	5
5	6	4	7

A(2,3) =

4	6	7	5
7	5	4	6
5	7	6	4
6	4	5	7

A′(2,3) =

4	7	5	6
6	5	7	4
7	4	6	5
5	6	4	7

A(3,1) =

4	7	5	6
6	5	7	4
7	4	6	5
5	6	4	7

A′(3,1) =

4	7	5	6
6	5	7	4
7	4	6	5
5	6	4	7

A(3,2) =

4	7	5	6
6	5	7	4
7	4	6	5
5	6	4	7

A′(3,2) =

4	6	7	5
7	5	4	6
5	7	6	4
6	4	5	7

F_1 =

1	3	2	7,1	4,1	5,1	6,1	6,2	7,2	4,2	5,2	7,3	6,3	4,3	5,3
3	2	1	6,1	7,1	4,1	5,1	7,2	6,2	5,2	4,2	6,3	7,3	5,3	4,3
2	1	3	5,1	6,1	7,1	4,1	5,2	4,2	7,2	6,2	5,3	4,3	7,3	6,3
5,1	6,1	7,1	4,1	1,1	3,1	2,1	4,3	6,3	7,3	5,3	4,2	6,2	7,2	5,2
6,1	7,1	4,1	2,1	5,1	1,1	3,1	7,3	5,3	4,3	6,3	7,2	5,2	5,2	6,2
7,1	4,1	5,1	3,1	2,1	6,1	1,1	5,3	7,3	6,3	4,3	5,2	7,2	6,2	4,2
4,1	5,1	6,1	1,1	3,1	2,1	7,1	6,3	4,3	5,3	7,3	6,2	4,2	5,2	7,2
5,2	7,2	6,2	4,3	7,1	5,1	6,1	4,2	3,3	1,3	2,3	4,1	6,2	7,2	5,2
4,2	6,2	7,2	6,1	5,3	7,1	4,1	2,3	5,2	3,3	1,3	7,2	5,1	4,2	6,2
7,2	5,2	4,2	7,1	4,1	6,3	5,1	1,3	2,3	6,2	3,3	5,2	7,2	6,1	4,2
6,2	4,2	5,2	5,1	6,1	4,1	7,3	3,3	1,3	2,3	7,2	6,2	4,2	5,2	7,1
5,3	6,3	7,3	4,2	7,2	5,2	6,2	4,1	7,1	5,1	6,1	4,3	1,3	2,3	3,3
4,3	7,3	6,3	6,2	5,2	7,2	4,2	6,1	5,1	7,1	4,1	2,3	5,3	3,3	1,3
7,3	5,3	4,3	7,2	4,2	6,2	5,2	7,1	4,1	6,1	5,1	1,3	3,3	6,3	2,3
6,3	4,3	5,3	5,2	6,2	4,2	7,2	5,1	6,1	4,1	7,1	3,3	2,3	1,3	7,3

$F_2 =$

1	3	2	6,1	7,1	4,1	5,1	7,2	6,2	4,2	5,2	7,3	4,3	5,3	6,3
3	2	1	7,1	6,1	5,1	4,1	6,2	7,2	5,2	4,2	6,3	7,3	4,3	5,3
2	1	3	5,1	4,1	7,1	6,1	5,2	4,2	7,2	6,2	5,3	6,3	7,3	4,3
5,1	7,1	6,1	4,1	3,1	1,1	2,1	4,3	7,3	5,3	6,3	4,2	6,2	7,2	5,2
4,1	6,1	7,1	2,1	5,1	3,1	1,1	6,3	5,3	7,3	4,3	7,2	5,2	5,2	6,2
7,1	5,1	4,1	1,1	2,1	6,1	3,1	7,3	4,3	6,3	5,3	5,2	7,2	6,2	4,2
6,1	4,1	5,1	3,1	1,1	2,1	7,1	5,3	6,3	4,3	7,3	6,2	4,2	5,2	7,2
5,2	6,2	7,2	4,3	7,1	5,1	6,1	4,2	1,3	2,3	3,3	4,1	7,2	5,2	6,2
4,2	7,2	6,2	6,1	5,3	7,1	4,1	2,3	5,2	3,3	1,3	6,2	5,1	7,2	4,2
7,2	5,2	4,2	7,1	4,1	6,3	5,1	1,3	3,3	6,2	2,3	7,2	4,2	6,1	5,2
6,2	4,2	5,2	5,1	6,1	4,1	7,3	3,3	2,3	1,3	7,2	5,2	6,2	4,2	7,1
5,3	6,3	7,3	4,2	7,2	5,2	6,2	4,1	6,1	7,1	5,1	4,3	1,3	3,3	2,3
6,3	7,3	4,3	6,2	5,2	7,2	4,2	7,1	5,1	4,1	6,1	2,3	5,3	1,3	3,3
7,3	4,3	5,3	7,2	4,2	6,2	5,2	5,1	7,1	6,1	4,1	3,3	2,3	6,3	1,3
4,3	5,3	6,3	5,2	6,2	4,2	7,2	6,1	4,1	5,1	7,1	1,3	3,3	2,3	7,3

This construction produces latin squares F_1 and F_2 with holes {1, 2, 3}, {(4,1),(4,2),(4,3)}, {(5,1),(5,2),(5,3)}, {(6,1),(6,2),(6,3)}, and {(7,1),(7,2),(7,3)} such that $|F_1 \bigcap F_2| = k$ for all k $\in${0, 2, 4,........., 168}

The missing intersection numbers are {1, 3, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 176, 180}. Using a Java program and manual techniques we found latin squares B_1, B_2; L_1, L_2,.........., L_9, L_{10} such that for each k $\in$ {1, 3, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 176, 180} there is a B_i and L_j such that $|B_i \bigcap L_j| = k$. These are given in tabular form.

The following is a list of the latin squares B_1, B_2; L_1, L_2,.........., L_{10}:

1	3	2	7	8	9	4	5	6	13	14	15	10	11	12
3	2	1	8	7	10	5	4	11	14	15	13	6	12	9
2	1	3	9	10	7	6	11	4	15	13	14	12	5	8
7	8	12	4	6	5	13	14	15	1	2	3	9	10	11
8	7	13	6	5	4	12	15	14	2	1	9	11	3	10
10	11	14	5	4	6	15	12	13	3	7	1	8	9	2
11	10	15	12	13	14	7	9	8	4	3	2	1	6	5
12	13	10	11	14	15	9	8	7	5	4	6	3	2	1
14	15	11	10	12	13	8	7	9	6	5	4	2	1	3
9	14	8	13	15	3	2	6	1	10	12	11	5	7	4
15	9	6	14	2	1	3	13	5	12	11	10	4	8	7
13	5	9	15	1	8	14	2	3	11	10	12	7	4	6
5	12	4	3	9	2	11	1	10	8	6	7	13	15	14
4	6	5	1	11	12	10	3	2	7	9	8	15	14	13
6	4	7	2	3	11	1	10	12	9	8	5	14	13	15

B_1

1	3	2	7	8	9	4	5	6	13	14	15	10	11	12
3	2	1	8	7	10	5	4	11	14	15	13	6	12	9
2	1	3	9	10	7	6	11	4	15	13	14	12	5	8
7	8	12	4	6	5	13	14	15	1	2	3	9	10	11
8	7	13	6	5	4	12	15	14	2	1	9	11	3	10
10	11	14	5	4	6	15	12	13	3	7	1	8	9	2
11	10	15	12	13	14	7	9	8	4	3	2	1	6	5
12	13	10	11	14	15	9	8	7	5	4	6	2	1	3
13	14	11	10	15	12	8	7	9	6	5	4	3	2	1
5	6	9	15	1	2	14	13	3	10	11	12	4	8	7
14	15	5	13	9	8	1	3	2	12	11	10	7	4	6
15	9	8	14	2	13	3	6	1	11	10	12	5	7	4
4	5	6	1	3	11	2	10	12	7	9	8	13	15	14
6	4	7	2	12	3	11	1	10	9	8	5	15	14	13
9	12	4	3	11	1	10	2	5	8	6	7	14	13	15

B_2

2	1	3	9	10	7	6	11	4	15	13	14	12	5	8
1	3	2	7	8	9	4	5	6	13	14	15	10	11	12
3	2	1	8	7	10	5	4	11	14	15	13	6	12	9
10	11	14	6	5	4	15	12	13	3	7	1	8	9	2
7	8	12	5	4	6	13	14	15	1	2	3	9	10	11
8	7	13	4	6	5	12	15	14	2	1	9	11	3	10
13	14	11	10	15	12	9	8	7	6	5	4	3	2	1
11	10	15	12	13	14	7	9	8	4	3	2	1	6	5
12	13	10	11	14	15	7	9	8	5	4	6	2	1	3
6	15	8	14	9	13	1	3	2	10	12	11	5	7	4
15	9	6	13	3	1	14	2	5	12	11	10	4	8	7
14	5	9	15	1	8	2	13	3	11	10	12	7	4	6
9	4	5	2	12	3	11	1	10	8	6	7	13	15	14
5	12	4	3	11	2	10	6	1	7	9	8	15	14	13
4	6	7	1	2	11	3	10	12	9	8	5	14	13	15

L_1

3	2	1	8	7	10	5	4	11	14	15	13	6	12	9
2	1	3	9	10	7	6	11	4	15	13	14	12	5	8
1	3	2	7	8	9	4	5	6	13	14	15	10	11	12
8	7	13	6	5	4	12	15	14	2	1	9	11	3	10
10	11	14	5	4	6	15	12	13	3	7	1	8	9	2
7	8	12	4	6	5	13	14	15	1	2	3	9	10	11
12	13	10	11	14	15	9	8	7	5	4	6	3	2	1
14	15	11	10	12	13	8	7	9	6	5	4	2	1	3
11	10	15	12	13	14	7	9	8	4	3	2	1	6	5
15	9	6	14	2	1	3	13	5	12	11	10	4	8	7
13	5	9	15	1	8	14	2	3	11	10	12	7	4	6
9	14	8	13	15	3	2	6	1	10	12	11	5	7	4
6	4	7	2	3	11	1	10	12	9	8	5	13	15	14
4	12	5	3	9	2	11	1	10	8	6	7	15	14	13
5	6	4	1	11	12	10	3	2	7	9	8	14	13	15

L_2

1	3	2	7	8	9	4	5	6	13	14	15	10	11	12
3	2	1	8	7	10	5	4	11	14	15	13	6	12	9
2	1	3	9	10	7	6	11	4	15	13	14	12	5	8
7	8	12	4	6	5	13	14	15	1	2	3	9	10	11
8	7	13	6	5	4	12	15	14	2	1	9	11	3	10
10	11	14	5	4	6	15	12	13	3	7	1	8	9	2
11	10	15	12	13	14	7	9	8	4	3	2	1	6	5
12	13	10	11	14	15	9	8	7	5	4	6	3	2	1
14	12	11	10	15	13	8	7	9	6	5	4	2	1	3
13	14	8	15	9	3	2	6	1	10	12	11	5	7	4
9	15	6	14	2	1	3	13	5	12	11	10	4	8	7
15	5	9	13	1	8	14	2	3	11	10	12	7	4	6
5	9	4	3	12	2	11	1	10	8	6	7	13	15	14
4	6	5	1	11	12	10	3	2	7	9	8	15	14	13
6	4	7	2	3	11	1	10	12	9	8	5	14	13	15

L_3

1	3	2	7	8	9	4	5	6	13	14	15	10	11	12
3	2	1	8	7	10	5	4	11	14	15	13	6	12	9
2	1	3	9	10	7	6	11	4	15	13	14	12	5	8
7	8	12	4	6	5	13	14	15	1	2	3	9	10	11
8	7	13	6	5	4	12	15	14	2	1	9	11	3	10
10	11	14	5	4	6	15	12	13	3	7	1	8	9	2
11	10	15	12	13	14	7	9	8	4	3	2	1	6	5
12	13	10	11	14	15	9	8	7	5	4	6	2	1	3
14	15	11	10	12	13	8	7	9	6	5	4	3	2	1
9	14	8	13	15	3	2	6	1	10	12	11	5	7	4
15	9	6	14	2	1	3	13	5	12	11	10	4	8	7
13	5	9	15	1	8	14	2	3	11	10	12	7	4	6
4	12	5	3	9	2	11	1	10	8	6	7	13	15	14
5	6	4	1	11	12	10	3	2	7	9	8	15	14	13
6	4	7	2	3	11	1	10	12	9	8	5	14	13	15

L_4

1	3	2	7	8	9	4	5	6	13	14	15	10	11	12
3	2	1	8	7	10	5	4	11	14	15	13	6	12	9
2	1	3	9	10	7	6	11	4	15	13	14	12	5	8
7	8	12	4	6	5	13	14	15	1	2	3	9	10	11
8	7	13	6	5	4	12	15	14	2	1	9	11	3	10
10	11	14	5	4	6	15	12	13	3	7	1	8	9	2
11	10	15	12	13	14	7	9	8	4	3	2	1	6	5
12	13	10	11	14	15	9	8	7	5	4	6	3	2	1
14	15	11	10	12	13	8	7	9	6	5	4	2	1	3
9	14	8	13	15	1	3	6	2	10	12	11	5	7	4
15	9	6	14	2	3	1	13	5	12	11	10	4	8	7
13	5	9	15	1	8	14	2	3	11	10	12	7	4	6
5	12	4	3	9	2	11	1	10	8	6	7	13	15	14
4	6	5	2	11	12	10	3	1	7	9	8	15	14	13
6	4	7	1	3	11	2	10	12	9	8	5	14	13	15

L_5

1	3	2	7	8	9	4	5	6	13	14	15	10	11	12
3	2	1	8	7	10	5	4	11	14	15	13	6	12	9
2	1	3	9	10	7	6	11	4	15	13	14	12	5	8
7	8	12	4	6	5	13	14	15	1	2	3	9	10	11
8	7	13	6	5	4	12	15	14	2	1	9	11	3	10
10	11	14	5	4	6	15	12	13	3	7	1	8	9	2
11	10	15	12	13	14	7	9	8	4	3	2	1	6	5
12	13	10	11	14	15	9	8	7	5	4	6	3	2	1
14	12	11	10	15	13	8	7	9	6	5	4	2	1	3
15	14	8	13	9	3	2	6	1	10	12	11	5	7	4
9	15	6	14	2	1	3	13	5	12	11	10	4	8	7
13	5	9	15	1	8	14	2	3	11	10	12	7	4	6
5	9	4	3	12	2	11	1	10	8	6	7	13	15	14
4	6	5	1	11	12	10	3	2	7	9	8	15	14	13
6	4	7	2	3	11	1	10	12	9	8	5	14	13	15

L_6

1	3	2	7	8	9	4	5	6	13	14	15	10	11	12
3	2	1	8	7	10	5	4	11	14	15	13	6	12	9
2	1	3	9	10	7	6	11	4	15	13	14	12	5	8
7	8	12	4	6	5	13	14	15	1	2	3	9	10	11
8	7	13	6	5	4	12	15	14	2	1	9	11	3	10
10	11	14	5	4	6	15	12	13	3	7	1	8	9	2
11	10	15	12	13	14	7	9	8	4	3	2	1	6	5
12	13	10	11	14	15	9	8	7	5	4	6	3	2	1
14	15	11	10	12	13	8	7	9	6	5	4	2	1	3
9	14	8	13	15	3	2	6	1	10	12	11	5	7	4
15	9	6	14	2	1	3	13	5	12	11	10	4	8	7
13	5	9	15	1	8	14	2	3	11	10	12	7	4	6
4	12	7	3	9	2	11	1	10	8	6	5	13	15	14
5	6	4	1	11	12	10	3	2	7	9	8	15	14	13
6	4	5	2	3	11	1	10	12	9	8	7	14	13	15

L_7

1	3	2	7	8	9	4	5	6	13	14	15	10	11	12
3	2	1	8	7	10	5	4	11	14	15	13	6	12	9
2	1	3	9	10	7	6	11	4	15	13	14	12	5	8
7	8	12	4	6	5	13	14	15	1	2	3	9	10	11
8	7	13	6	5	4	12	15	14	2	1	9	11	3	10
10	11	14	5	4	6	15	12	13	3	7	1	8	9	2
11	10	15	12	13	14	7	9	8	4	3	2	1	6	5
12	13	10	11	14	15	9	8	7	5	4	6	2	1	3
14	15	11	10	12	13	8	7	9	6	5	4	3	2	1
9	14	8	13	15	3	2	6	1	10	12	11	5	7	4
15	9	6	14	2	1	3	13	5	12	11	10	4	8	7
13	5	9	15	1	8	14	2	3	11	10	12	7	4	6
5	12	4	3	9	2	11	1	10	8	6	7	13	15	14
4	6	5	1	11	12	10	3	2	7	9	8	15	14	13
6	4	7	2	3	11	1	10	12	9	8	5	14	13	15

L_8

1	3	2	7	8	9	4	5	6	13	14	15	10	11	12
3	2	1	8	7	10	5	4	11	14	15	13	6	12	9
2	1	3	9	10	7	6	11	4	15	13	14	12	5	8
7	8	12	4	6	5	13	14	15	1	2	3	9	10	11
8	7	13	6	5	4	12	15	14	2	1	9	11	3	10
10	11	14	5	4	6	15	12	13	3	7	1	8	9	2
11	10	15	12	13	14	7	9	8	4	3	2	1	6	5
12	13	10	11	14	15	9	8	7	5	4	6	3	2	1
14	15	11	10	12	13	8	7	9	6	5	4	2	1	3
9	14	8	13	15	3	2	6	1	10	12	11	5	7	4
15	9	6	14	2	1	3	13	5	12	11	10	4	8	7
13	5	9	15	1	8	14	2	3	11	10	12	7	4	6
4	12	5	3	9	2	11	1	10	8	6	7	13	15	14
5	6	4	1	11	12	10	3	2	7	9	8	15	14	13
6	4	7	2	3	11	1	10	12	9	8	5	14	13	15

L_9

1	3	2	7	8	9	4	5	6	13	14	15	10	11	12
3	2	1	8	7	10	5	4	11	14	15	13	6	12	9
2	1	3	9	10	7	6	11	4	15	13	14	12	5	8
7	8	12	4	6	5	13	14	15	1	2	3	9	10	11
8	7	13	6	5	4	12	15	14	2	1	9	11	3	10
10	11	14	5	4	6	15	12	13	3	7	1	8	9	2
11	10	15	12	13	14	7	9	8	4	3	2	1	6	5
12	13	10	11	14	15	9	8	7	5	4	6	3	2	1
14	15	11	10	12	13	8	7	9	6	5	4	2	1	3
9	14	8	13	15	3	2	6	1	10	12	11	5	7	4
15	9	6	14	2	1	3	13	5	12	11	10	4	8	7
13	5	9	15	1	8	14	2	3	11	10	12	7	4	6
5	12	4	3	9	2	11	1	10	8	6	7	13	15	14
4	6	5	1	11	12	10	3	2	7	9	8	15	14	13
6	4	7	2	3	11	1	10	12	9	8	5	14	13	15

L_{10}

k	$B_i \bigcap L_j$	k	$B_i \bigcap L_j$
1	$B_2 \bigcap L_1$	173	$B_1 \bigcap L_7$
3	$B_1 \bigcap L_2$	174	$B_1 \bigcap L_8$
169	$B_1 \bigcap L_3$	176	$B_1 \bigcap L_9$
170	$B_1 \bigcap L_4$	180	$B_1 \bigcap L_{10}$
171	$B_1 \bigcap L_5$		
172	$B_1 \bigcap L_6$		

Lemma 8.1 The spectrum for 15×15 latin squares with holes of size 3 having k entries in common outside of the holes is $\{0, 1, 2, ..., 180\} \setminus \{175, 177, 178, 179\}$. ■

Chapter 9

The Complete Solution of the Intersection Problem for Latin Squares with Holes of Size 3

To begin with there is nothing to prove for n = 3 and 6. For n = 9 it is immediate that the intersection numbers are all 3k where k $\in$ {0, 1, 2,......., 17, 18}.

Now let A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, I_1 be any idempotent latin squares of order n $\geq$ 6 and let T be the latin square

T =

1	3	2
3	2	1
2	1	3

Let T_1 be the latin square defined by the generalized direct product

T_1 =

$A_1 \times \{1\}$	$B_1 \times \{3\}$	$C_1 \times \{2\}$
$D_1 \times \{3\}$	$E_1 \times \{2\}$	$F_1 \times \{1\}$
$G_1 \times \{2\}$	$H_1 \times \{1\}$	$I_1 \times \{3\}$

Then T_1 is a latin square of order 3n with holes H = {h_1, h_2,......, h_n}, h_i = {(i,1), (i,2), (i,3)}, of size 3.

Example 9.1 (Generalized direct Product of order 18)

$A_1 =$

1	6	2	5	3	4
4	2	5	6	1	3
2	4	3	1	6	5
5	3	6	4	2	1
6	1	4	3	5	2
3	5	1	2	4	6

$B_1 =$

1	6	5	2	4	3
5	2	6	1	3	4
6	4	3	5	1	2
3	1	2	4	6	5
2	3	4	6	5	1
4	5	1	3	2	6

$C_1 =$

1	5	6	2	3	4
6	2	5	1	4	3
5	4	3	6	2	1
3	1	2	4	6	5
4	6	1	3	5	2
2	3	4	5	1	6

$D_1 =$

1	5	2	6	3	4
5	2	6	1	4	3
6	4	3	2	1	5
3	1	5	4	6	2
2	6	4	3	5	1
4	3	1	5	2	6

$E_1 =$

1	6	5	2	3	4
5	2	6	3	1	4
4	5	3	1	6	2
6	3	1	4	2	5
2	1	4	6	5	3
3	4	2	5	1	6

$F_1 =$

1	6	5	2	3	4
5	2	6	3	4	1
4	5	3	1	6	2
6	3	2	4	1	5
2	4	1	6	5	3
3	1	4	5	2	6

$G_1 =$

1	3	6	5	4	2
3	2	4	1	6	5
5	1	3	6	2	4
2	6	5	4	1	3
6	4	2	3	5	1
4	5	1	2	3	6

$H_1 =$

1	5	2	6	3	4
4	2	6	5	1	3
5	4	3	2	6	1
6	3	1	4	2	5
3	6	4	1	5	2
2	1	5	3	4	6

$I_1 =$

1	6	5	2	3	4
5	2	6	3	4	1
4	5	3	1	6	2
6	3	1	4	2	5
2	1	4	6	5	3
3	4	2	5	1	6

Then

$T_1 =$

1,1	6,1	2,1	5,1	3,1	4,1	1,3	6,3	5,3	2,3	4,3	3,3	1,2	5,2	6,2	2,2	3,2	4,2
4,1	2,1	5,1	6,1	1,1	3,1	5,3	2,3	6,3	1,3	3,3	4,3	6,2	2,2	5,2	1,2	4,2	3,2
2,1	4,1	3,1	1,1	6,1	5,1	6,3	4,3	3,3	5,3	1,3	2,3	5,2	4,2	3,2	6,2	2,2	1,2
5,1	3,1	6,1	4,1	2,1	1,1	3,3	1,3	2,3	4,3	6,3	5,3	3,2	1,2	2,2	4,2	6,2	5,2
6,1	1,1	4,1	3,1	5,1	2,1	2,3	3,3	4,3	6,3	5,3	1,3	4,2	6,2	1,2	3,2	5,2	2,2
3,1	5,1	1,1	2,1	4,1	6,1	4,3	5,3	1,3	3,3	2,3	6,3	2,2	3,2	4,2	5,2	1,2	6,2
1,3	5,3	2,3	6,3	3,3	4,3	1,2	6,2	5,2	2,2	3,2	4,2	1,1	6,1	5,1	2,1	3,1	4,1
5,3	2,3	6,3	1,3	4,3	3,3	5,2	2,2	6,2	3,2	1,2	4,2	5,1	2,1	6,1	3,1	4,1	1,1
6,3	4,3	3,3	2,3	1,3	5,3	4,2	5,2	3,2	1,2	6,2	2,2	4,1	5,1	3,1	1,1	6,1	2,1
3,3	1,3	5,3	4,3	6,3	2,3	6,2	3,2	1,2	4,2	2,2	5,2	6,1	3,1	2,1	4,1	1,1	5,1
2,3	6,3	4,3	3,3	5,3	1,3	2,2	1,2	4,2	6,2	5,2	3,2	2,1	4,1	1,1	6,1	5,1	3,1
4,3	3,3	1,3	5,3	2,3	6,3	3,2	4,2	2,2	5,2	1,2	6,2	3,1	1,1	4,1	5,1	2,1	6,1
1,2	3,2	6,2	5,2	4,2	2,2	1,1	5,1	2,1	6,1	3,1	4,1	1,3	6,3	5,3	2,3	3,3	4,3
3,2	2,2	4,2	1,2	6,2	5,2	4,1	2,1	6,1	5,1	1,1	3,1	5,3	2,3	6,3	3,3	4,3	1,3
5,2	1,2	3,2	6,2	2,2	4,2	5,1	4,1	3,1	2,1	6,1	1,1	4,3	5,3	3,3	1,3	6,3	2,3
2,2	6,2	5,2	4,2	1,2	3,2	6,1	3,1	1,1	4,1	2,1	5,1	6,3	3,3	1,3	4,3	2,3	5,3
6,2	4,2	2,2	3,2	5,2	1,2	3,1	6,1	4,1	1,1	5,1	2,1	2,3	1,3	4,3	6,3	5,3	3,3
4,2	5,2	1,2	2,2	3,2	6,2	2,1	1,1	5,1	3,1	4,1	6,1	3,3	4,3	2,3	5,3	1,3	6,3

Note that the cells of size 3 are {(i,1), (i,2), (i,3)}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Now let A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2, I_1, and I_2 be idempotent latin squares of order $n \geq 6$ and let

$T_1 =$

$A_1 \times \{1\}$	$B_1 \times \{3\}$	$C_1 \times \{2\}$
$D_1 \times \{3\}$	$E_1 \times \{2\}$	$F_1 \times \{1\}$
$G_1 \times \{2\}$	$H_1 \times \{1\}$	$I_1 \times \{3\}$

$T_2 =$

$A_2 \times \{1\}$	$B_2 \times \{3\}$	$C_2 \times \{2\}$
$D_2 \times \{3\}$	$E_2 \times \{2\}$	$F_2 \times \{1\}$
$G_2 \times \{2\}$	$H_2 \times \{1\}$	$I_2 \times \{3\}$

be the generalized direct products of order 3n constructed from the above latin squares and T. Then T_1 and T_2 are latin squares of order 3n with holes $H = \{h_1, h_2, ..., h_n\}$, $h_i = \{(i,1), (i,2), (i,3)\}$, of size 3.

If $|A_1 \bigcap A_2| = x_1$, $|B_1 \bigcap B_2| = x_2$, $|C_1 \bigcap C_2| = x_3$, $|D_1 \bigcap D_2| = x_4$, $|E_1 \bigcap E_2| = x_5$, $|F_1 \bigcap F_2| = x_6$, $|G_1 \bigcap G_2| = x_7$, $|H_1 \bigcap H_2| = x_8$, and $|I_1 \bigcap I_2| = x_9$, then $|T_1 \bigcap T_2| = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$.

Example 9.2 (Two 18 × 18 latin squares intersecting in 69 cells)

$A_2 =$

1	6	5	2	3	4
5	2	1	6	4	3
2	4	3	5	6	1
3	1	6	4	2	5
6	3	4	1	5	2
4	5	2	3	1	6

$B_2 =$

1	4	2	6	3	5
5	2	4	3	6	1
6	5	3	1	4	2
2	6	5	4	1	3
3	1	6	2	5	4
4	3	1	5	2	6

$C_2 =$

1	6	2	5	3	4
4	2	5	1	6	3
5	4	3	6	1	2
3	1	6	4	2	5
6	3	4	2	5	1
2	5	1	3	4	6

$D_2 =$

1	4	2	5	6	3
6	2	5	1	3	4
4	1	3	6	2	5
5	3	6	4	1	2
2	6	4	3	5	1
3	5	1	2	4	6

$E_2 =$

1	4	2	6	3	5
4	2	5	1	6	3
6	1	3	5	2	4
5	3	6	4	1	2
2	6	4	3	5	1
3	5	1	2	4	6

$F_2 =$

1	5	2	3	6	4
5	2	6	1	4	3
6	4	3	2	1	5
2	6	5	4	3	1
3	1	4	6	5	2
4	3	1	5	2	6

$G_2 =$

1	6	5	2	3	4
5	2	6	3	4	1
4	5	3	1	6	2
6	3	1	4	2	5
2	1	4	6	5	3
3	4	2	5	1	6

$H_2 =$

1	6	5	2	4	3
5	2	1	6	3	4
2	4	3	5	6	1
3	1	6	4	2	5
6	3	4	1	5	2
4	5	2	3	1	6

$I_2 =$

1	6	2	5	3	4
4	2	5	6	1	3
2	4	3	1	6	5
5	3	6	4	2	1
6	1	4	3	5	2
3	5	1	2	4	6

Then

$T_2 =$

1,1	6,1	5,1	2,1	3,1	4,1	1,3	4,3	2,3	6,3	3,3	5,3	1,2	6,2	2,2	5,2	3,2	4,2
5,1	2,1	1,1	6,1	4,1	3,1	5,3	2,3	4,3	3,3	6,3	1,3	4,2	2,2	5,2	1,2	6,2	3,2
2,1	4,1	3,1	5,1	6,1	1,1	6,3	5,3	3,3	1,3	4,3	2,3	5,2	4,2	3,2	6,2	1,2	2,2
3,1	1,1	6,1	4,1	2,1	5,1	2,3	6,3	5,3	4,3	1,3	3,3	3,2	1,2	6,2	4,2	2,2	5,2
6,1	3,1	4,1	1,1	5,1	2,1	3,3	1,3	6,3	2,3	5,3	4,3	6,2	3,2	4,2	2,2	5,2	1,2
4,1	5,1	2,1	3,1	1,1	6,1	4,3	3,3	1,3	5,3	2,3	6,3	2,2	5,2	1,2	3,2	4,2	6,2
1,3	4,3	2,3	5,3	6,3	3,3	1,2	4,2	2,2	6,2	3,2	5,2	1,1	5,1	2,1	3,1	6,1	4,1
6,3	2,3	5,3	1,3	3,3	4,3	4,2	2,2	5,2	1,2	6,2	3,2	5,1	2,1	6,1	1,1	4,1	3,1
4,3	1,3	3,3	6,3	2,3	5,3	6,2	1,2	3,2	5,2	2,2	4,2	6,1	4,1	3,1	2,1	1,1	5,1
5,3	3,3	6,3	4,3	1,3	2,3	5,2	3,2	6,2	4,2	1,2	2,2	2,1	6,1	5,1	4,1	3,1	1,1
2,3	6,3	4,3	3,3	5,3	1,3	2,2	6,2	4,2	3,2	5,2	1,2	3,1	1,1	4,1	6,1	5,1	2,1
3,3	5,3	1,3	2,3	4,3	6,3	3,2	5,2	1,2	2,2	4,2	6,2	4,1	3,1	1,1	5,1	2,1	6,1
1,2	6,2	5,2	2,2	3,2	4,2	1,1	6,1	5,1	2,1	4,1	3,1	1,3	6,3	2,3	5,3	3,3	4,3
5,2	2,2	6,2	3,2	4,2	1,2	5,1	2,1	1,1	6,1	3,1	4,1	4,3	2,3	5,3	6,3	1,3	3,3
4,2	5,2	3,2	1,2	6,2	2,2	2,1	4,1	3,1	5,1	6,1	1,1	2,3	4,3	3,3	1,3	6,3	5,3
6,2	3,2	1,2	4,2	2,2	5,2	3,1	1,1	6,1	4,1	2,1	5,1	5,3	3,3	6,3	4,3	2,3	1,3
2,2	1,2	4,2	6,2	5,2	3,2	6,1	3,1	4,1	1,1	5,1	2,1	6,3	1,3	4,3	3,3	5,3	2,3
3,2	4,2	2,2	5,2	1,2	6,2	4,1	5,1	2,1	3,1	1,1	6,1	3,3	5,3	1,3	2,3	4,3	6,3

If A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2, I_1, and I_2 are as in Examples 9.1 and 9.2: $|A_1 \bigcap A_2| = 13$, $|B_1 \bigcap B_2| = 6$, $|C_1 \bigcap C_2| = 12$, $|D_1 \bigcap D_2| = 10$, $|E_1 \bigcap E_2| = 3$, $|F_1 \bigcap F_2| = 6$, $|G_1 \bigcap G_2| = 0$, $|H_1 \bigcap H_2| = 9$, and $|I_1 \bigcap I_2| = 10$; so that $|T_1 \bigcap T_2| = 13 + 6 + 12 + 10 + 3 + 6 + 0 + 9 + 10 = 69$.

Lemma 9.3 If $3n \geq 18$, there exists a pair of $3n \times 3n$ latin squares with holes of size 3 intersecting in k entries if and only if $k \in \{0, 1, 2,....., x = 9n^2 - 9n\} \setminus \{x - 1, x - 2, x - 3, x - 5\}$. ■

Proof. If $k \in \{0, 1, 2,...., x = 9n^2 - 9n\} \setminus \{x - 1, x - 2, x - 3, x - 5\}$, we can always write $k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$, where each x_i belongs to $\{0, 1, 2,......, x = n^2 - n\} \setminus \{x - 1, x - 2, x - 3, x - 5\}$. ■

Theorem 9.4 The spectrum for pairs of latin squares with holes of size 3 intersecting in k entries is:

(i) $(9, 3k)$, $k \in \{0, 1, 2,......., 17, 18\}$ and

(ii) $(3n, k)$, $3n \geq 12$ and $k \in \{0, 1, 2,......., x = 9n^2 - 9n\} \setminus \{x - 1, x - 2, x - 3, x - 5\}$. ■

Proof. The comments at the beginning of this chapter plus Lemmas 7.1, 8.1, and 9.3. ■

Bibliography

[1] Fu, Hung Lin. On the Construction of Certain Types of Latin Squares Having Prescribed Intersections. Dissertation, Auburn Unviersity, 1980.

[2] Hall, Marshall, Jr. "Distinct Representatives of Subsets." Bull. Amer. Math Soc. 54(1948): 922-926.

[3] Lindner, C.C. and Evans, Trevor. "Finite Embedding Theorems for Designs and Algebras." Les Presses de l'Universite de Montreal. (1977): 199.

[4] Smetaniuk, Bohdan. "A New Construction on Latin Squares - II: The Number of Latin Squares is Strictly Increasing." Ars Comb.14(1982): 131-145.